HEC Paris

Mathématiques approfondies – Mathématiques I

Corrigé du sujet adapté – 2010

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\|\cdot\|$ le produit scalaire et la norme canoniques de $\mathbb{R}^n$, et $\vec{1} = (1, \dots, 1)$.

Partie I – Projection sur un convexe fermé

Partie I – Exemples et cas général

$p(x)$ est un vecteur de K tel que $\|x - p(x)\| = \min_{z \in K} \|x - z\|$; h sépare K_1 et K_2 s'il existe c tel que $\langle h, u \rangle < c < \langle h, v \rangle$ pour tous $u \in K_1$, $v \in K_2$.

Corrigé – Partie I.

1. **Exemple 1 :** $K = \{(z_1, z_2) \mid z_1 \leqslant 1,\ z_2 \leqslant 1\}$.

   a) *Convexité.* Soient $z, z' \in K$ et $t \in [0, 1]$. Pour $i \in \{1, 2\}$, on a $tz_i + (1-t)z'_i \leqslant t + (1-t) = 1$, car $t \geqslant 0$ et $1 - t \geqslant 0$. Donc $tz + (1-t)z' \in K$.
   Fermeture. Les fonctions $\pi_1 : (z_1, z_2) \mapsto z_1$ et $\pi_2 : (z_1, z_2) \mapsto z_2$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$, et $K = \pi_1^{-1}(]-\infty, 1]) \cap \pi_2^{-1}(]-\infty, 1])$ est l'intersection de deux fermés : c'est un fermé.
   Non bornée. Pour $k \in \mathbb{N}$, $(-k, 0) \in K$ et $\|(-k, 0)\| = k \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$.

   $$\boxed{K \text{ est convexe et fermé, mais n'est pas borné.}}$$

   b) Pour $z \in K$, $\|x - z\|^2 = (x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2$, et les deux termes ne dépendent que d'une variable chacun. Minimiser $\|x - z\|$ sur K revient donc à minimiser séparément, pour $i = 1, 2$, la quantité $(x_i - z_i)^2$ sous la contrainte $z_i \leqslant 1$.

   - Si $x_i \leqslant 1$, le minimum vaut 0 et il n'est atteint qu'en $z_i = x_i$.
   - Si $x_i > 1$, alors pour $z_i \leqslant 1$, $x_i - z_i \geqslant x_i - 1 > 0$, donc $(x_i - z_i)^2 \geqslant (x_i - 1)^2$, avec égalité si et seulement si $z_i = 1$.

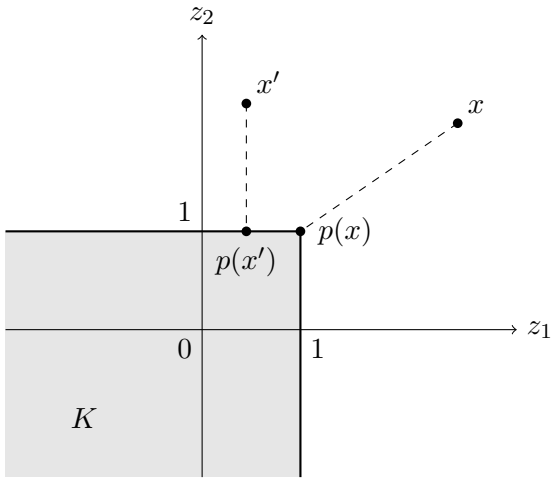
   Dans les deux cas, le minimum est atteint en un unique point $z_i = \min(x_i, 1)$. Le couple de ces minimiseurs est l'unique point de K qui réalise $\min_{z \in K} \|x - z\|$.

   $$\boxed{p(x) = (\min(x_1, 1),\ \min(x_2, 1)).}$$

   Comme $x \notin K$, l'une au moins des coordonnées x_1, x_2 est strictement supérieure à 1.

   c) On représente deux situations : $x = (2{,}6\,;2{,}1)$, avec $p(x) = (1, 1)$, et $x' = (0{,}45\,;2{,}3)$,

avec $p(x') = (0{,}45\,;1)$.



d) D'après b), $\|x - p(x)\| = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$, où $d_i = x_i - 1$ si $x_i > 1$ et $d_i = 0$ sinon. La fonction calcule d_1 et d_2 par deux tests.

```
def distance(x1, x2):
    d1 = 0
    d2 = 0
    if x1 > 1:
        d1 = x1 - 1
    if x2 > 1:
        d2 = x2 - 1
    return np.sqrt(d1**2 + d2**2)
```

e) Soit $z \in K$. On note $p = p(x)$, et on a $\langle z - p, x - p\rangle = \sum_{i=1}^{2}(z_i - p_i)(x_i - p_i)$. Si $x_i \leqslant 1$, alors $p_i = x_i$ et le terme est nul. Si $x_i > 1$, alors $p_i = 1$, $z_i - 1 \leqslant 0$ et $x_i - 1 > 0$, et le terme est négatif ou nul.

$$\boxed{\forall z \in K, \quad \langle z - p(x), x - p(x)\rangle \leqslant 0.}$$

f) Soit $h = x - p(x)$. Comme $x \notin K$ et $p(x) \in K$, $h \neq \vec{0}$. On a $\langle h, x\rangle - \langle h, p(x)\rangle = \|h\|^2 > 0$. Pour $z \in K$, e) donne $\langle h, z\rangle \leqslant \langle h, p(x)\rangle$. On pose $c = \langle h, p(x)\rangle + \frac{1}{2}\|h\|^2$. Alors

$$\langle h, z\rangle \leqslant \langle h, p(x)\rangle < c < \langle h, p(x)\rangle + \|h\|^2 = \langle h, x\rangle.$$

$$\boxed{c = \langle x - p(x), p(x)\rangle + \tfrac{1}{2}\|x - p(x)\|^2 \text{ convient :}}$$

$$\boxed{\forall z \in K, \quad \langle x - p(x), z\rangle < c < \langle x - p(x), x\rangle.}$$

2. Exemple 2 : un sous-espace vectoriel.

a) E est non vide (il contient $\vec{0}$). Si $u, v \in E$ et $t \in [0, 1]$, alors $tu + (1 - t)v \in E$, car E est stable par combinaison linéaire.

$$\boxed{E \text{ est une partie convexe de } \mathbb{R}^n.}$$

b) On pose $a = (1, 1, -1, -1)$, de sorte que $E = \{w \in \mathbb{R}^4 \mid \langle w, a\rangle = 0\}$ et $\|a\|^2 = 4$. On note $s = \langle x, a\rangle = x_1 + x_2 - x_3 - x_4$, avec $s \neq 0$ car $x \notin E$. On pose $q = x - \frac{s}{4}a$.

- $\langle q, a\rangle = s - \frac{s}{4} \cdot 4 = 0$, donc $q \in E$.

- Pour $w \in E$, $x - w = (x - q) + (q - w)$, avec $x - q = \frac{s}{4}a$ et $q - w \in E$. Ces deux vecteurs sont orthogonaux, car $\langle a, q - w\rangle = 0$. Par le théorème de Pythagore,

$$\|x - w\|^2 = \|x - q\|^2 + \|q - w\|^2 \geqslant \|x - q\|^2,$$

avec égalité si et seulement si $w = q$.

Ainsi q est l'unique point de E qui réalise le minimum, et $\|x - q\| = \frac{|s|}{4}\|a\| = \frac{|s|}{2}$.

$$\boxed{\min_{w\in E}\|x - w\| = \frac{|x_1 + x_2 - x_3 - x_4|}{2},}$$

$$\boxed{p(x) = x - \frac{x_1 + x_2 - x_3 - x_4}{4}(1, 1, -1, -1) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \end{pmatrix}.}$$

3. Cas général : existence de la projection.

a) Pour $z, z' \in K$, l'inégalité triangulaire donne $\big|\|x - z\| - \|x - z'\|\big| \leqslant \|z - z'\|$. Donc $f(z') \to f(z)$ quand $z' \to z$. On peut aussi dire que $f(z) = \sqrt{\sum_i (x_i - z_i)^2}$ est la composée d'une fonction polynomiale positive et de la racine carrée, continue sur $\mathbb{R}_+$.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } K.}$$

b) On note $r = \|x - z_0\|$. La fonction $z \mapsto \|x - z\|$ est continue sur $\mathbb{R}^n$, donc $B_0 = \{z \mid \|x - z\| \in [0, r]\}$ est l'image réciproque d'un intervalle fermé : c'est un fermé. $K' = B_0 \cap K$ est l'intersection de deux fermés, donc c'est un fermé (son complémentaire est la réunion de deux ouverts). Enfin, pour $z \in K'$, $\|z\| \leqslant \|x\| + \|z - x\| \leqslant \|x\| + r$.

$$\boxed{K' \text{ est une partie fermée et bornée de } \mathbb{R}^n, \text{ non vide car } z_0 \in K'.}$$

c) f est continue sur la partie K', qui est fermée, bornée et non vide. Par le théorème des bornes atteintes, f admet un minimum sur K'.

$$\boxed{\exists\, \hat{z} \in K', \quad f(\hat{z}) = \min_{z\in K'} f(z).}$$

d) Soit $z \in K$. Si $z \in B_0$, alors $z \in K'$, et $\|x - z\| \geqslant \|x - \hat{z}\|$. Sinon, $\|x - z\| > r = f(z_0) \geqslant f(\hat{z})$, car $z_0 \in K'$.

$$\boxed{\forall z \in K,\ \|x - z\| \geqslant \|x - \hat{z}\| \ :\ \hat{z} \in K \text{ est une projection de } x \text{ sur } K.}$$

4. Unicité de la projection.

a) On pose $A = x - a$ et $B = x - b$. Alors $x - \frac{a+b}{2} = \frac{A+B}{2}$ et $a - b = B - A$. Par bilinéarité,

$$\Big\|x - \frac{a + b}{2}\Big\|^2 + \frac{1}{4}\|a - b\|^2 = \frac{1}{4}(\|A + B\|^2 + \|A - B\|^2) = \frac{1}{4}(2\|A\|^2 + 2\|B\|^2).$$

$$\boxed{\Big\|x - \frac{a + b}{2}\Big\|^2 + \frac{1}{4}\|a - b\|^2 = \frac{1}{2}\|x - a\|^2 + \frac{1}{2}\|x - b\|^2.}$$

b) Par convexité de K (avec $t = \frac{1}{2}$), $\frac{u+v}{2} \in K$, donc $\|x - \frac{u+v}{2}\|^2 \geqslant d^2$. L'identité a), appliquée avec $a = u$ et $b = v$, donne

$$d^2 + \frac{1}{4}\|u - v\|^2 \leqslant \frac{1}{2}d^2 + \frac{1}{2}d^2 = d^2,$$

d'où $\|u - v\| = 0$.

$\boxed{u = v \ : \text{ la projection } p(x) \text{ de } x \text{ sur } K \text{ existe (question 3) et elle est unique.}}$

5. Caractérisation de la projection.

a) Soient $z \in K$ et $t \in [0, 1]$. Par convexité, $tz + (1-t)p(x) \in K$, et $p(x)$ minimise $\|x - \cdot\|$ sur K, donc minimise aussi son carré.

$$\boxed{\|x - p(x)\|^2 \leqslant \|x - (tz + (1-t)p(x))\|^2.}$$

b) On note $p = p(x)$. On a $x - (tz + (1-t)p) = (x - p) - t(z - p)$. En développant, a) devient

$$\|x - p\|^2 \leqslant \|x - p\|^2 - 2t\langle z - p, x - p\rangle + t^2\|z - p\|^2.$$

Pour $t \in]0, 1]$, on divise par $2t > 0$: $\langle z - p, x - p\rangle \leqslant \frac{t}{2}\|z - p\|^2$. On fait tendre t vers 0^+.

$$\boxed{\forall z \in K, \quad \langle z - p(x), x - p(x)\rangle \leqslant 0.}$$

c) Soit $z \in K$. On a

$$\|x - z\|^2 = \|(x - y) - (z - y)\|^2 = \|x - y\|^2 - 2\langle z - y, x - y\rangle + \|z - y\|^2 \geqslant \|x - y\|^2,$$

car $\langle z - y, x - y\rangle \leqslant 0$. Ainsi $y \in K$ réalise $\min_{z \in K}\|x - z\|$, et par unicité (question 4), $y = p(x)$.

$$\boxed{p(x) \text{ est l'unique vecteur } y \text{ de } K \text{ tel que } \langle z - y, x - y\rangle \leqslant 0 \text{ pour tout } z \in K.}$$

d) On pose $h = x - p(x)$, avec $h \neq \vec{0}$ car $x \notin K$. On a $\langle h, x\rangle - \langle h, p(x)\rangle = \|h\|^2 > 0$.

$$\boxed{\langle x - p(x), p(x)\rangle < \langle x - p(x), x\rangle.}$$

Par b), pour tout $z \in K$, $\langle h, z\rangle \leqslant \langle h, p(x)\rangle$. Avec $c = \frac{1}{2}(\langle h, p(x)\rangle + \langle h, x\rangle)$, on obtient, pour tout $z \in K$, $\langle h, z\rangle \leqslant \langle h, p(x)\rangle < c < \langle h, x\rangle$.

$$\boxed{x - p(x) \text{ sépare } K \text{ et } \{x\}.}$$

Partie II – Un cas particulier

Partie II – Projection sur un ellipsoïde plein

$K = \{z \mid q(z) \leqslant 1\}$ avec $q(z) = \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i^2$, $\alpha_i > 0$. $x \notin K$, $x_i > 0$ pour tout i. $K_0 = \{z \in K \mid q(z) = 1\}$, $K_1 = \{z \in K \mid q(z) < 1\}$.

Corrigé – Partie II.

6. K **convexe, fermé, borné.**

Convexité. Soient $z, z' \in K$ et $t \in [0,1]$. La fonction $u \mapsto u^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$, donc $(tz_i + (1-t)z'_i)^2 \leqslant tz_i^2 + (1-t)z_i'^2$ pour tout i. En multipliant par $\alpha_i > 0$ et en sommant, $q(tz + (1-t)z') \leqslant tq(z) + (1-t)q(z') \leqslant 1$.

Fermeture. q est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}^n$, et $K = q^{-1}(]-\infty, 1])$ est l'image réciproque d'un intervalle fermé.

Bornitude. On pose $\alpha_m = \min_i \alpha_i > 0$. Pour $z \in K$, $\alpha_m \|z\|^2 \leqslant q(z) \leqslant 1$, donc $\|z\| \leqslant 1/\sqrt{\alpha_m}$.

$$\boxed{K \text{ est convexe, fermé et borné (et non vide : } \vec{0} \in K).}$$

D'après la partie I, la projection $p(x)$ existe et elle est unique.

7. Étude de $f(z) = \|x - z\|^2$**.**

a) $f(z) = \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2$ est une fonction polynomiale en $(z_1, \dots, z_n)$, donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur l'ouvert } K_1, \quad \partial_i f(z) = -2(x_i - z_i).}$$

b) Un point critique z de f vérifie $\partial_i f(z) = 0$ pour tout i, soit $z = x$. Or $x \notin K$, donc $x \notin K_1$.

$$\boxed{\text{La restriction de } f \text{ à } K_1 \text{ n'admet aucun point critique.}}$$

$p(x)$ minimise f sur K. Si l'on avait $p(x) \in K_1$, $p(x)$ serait un minimum de f sur l'ouvert $K_1 \subset K$. Par la condition nécessaire d'extremum local sur un ouvert pour une fonction de classe C^1, ce serait un point critique, ce qui est absurde. Donc $p(x) \in K \setminus K_1$.

$$\boxed{p(x) \in K_0.}$$

c) On note $p = p(x)$ et $p' = (|p_1|, \dots, |p_n|)$. On a $q(p') = q(p) \leqslant 1$, donc $p' \in K$. Pour tout i, comme $x_i > 0$,

$$(x_i - |p_i|)^2 - (x_i - p_i)^2 = 2x_i(p_i - |p_i|) \leqslant 0,$$

avec inégalité stricte si $p_i < 0$. Si une coordonnée de p était strictement négative, on aurait $f(p') < f(p)$, ce qui contredit la minimalité. Donc $p_i \geqslant 0$ pour tout i. Enfin, $q(p) = 1$ par b), donc $p \neq \vec{0}$.

$$\boxed{\text{Les coordonnées de } p(x) \text{ sont positives ou nulles, non toutes nulles.}}$$

8. Point critique de H**.**

Pour $z = (z_1, \dots, z_{n-1}) \in \Omega$, on a $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i z_i^2 < 1$, puisque $(z_1, \dots, z_{n-1}, 0) \in K_1$. Donc $u(z) = \frac{1}{\alpha_n}\big(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i z_i^2\big) > 0$, et $\Psi = \sqrt{u}$ est bien définie et strictement positive sur Ω.

a) On a $z_n^* = \Psi(z_1^*, \dots, z_{n-1}^*) > 0$. Ensuite,

$$q(z^*) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i z_i^{*2} + \alpha_n \cdot \frac{1}{\alpha_n}\Big(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i z_i^{*2}\Big) = 1.$$

$$\boxed{z_n^* > 0 \quad \text{et} \quad z^* \in K_0.}$$

b) u est polynomiale et à valeurs dans $]0,+\infty[$ sur Ω, et la racine carrée est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. Donc Ψ, puis H, sont de classe C^1 sur Ω. Pour $i \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\partial_i \Psi = \frac{\partial_i u}{2\sqrt{u}} = -\frac{\alpha_i z_i}{\alpha_n \Psi},$$
$$\partial_i H = -2(x_i - z_i) - 2(x_n - \Psi)\,\partial_i \Psi = -2(x_i - z_i) + \frac{2\alpha_i z_i (x_n - \Psi)}{\alpha_n \Psi}.$$

Au point critique, $\partial_i H = 0$ et $\Psi = z_n^*$, donc

$$x_i - z_i^* = \alpha_i z_i^* \cdot \frac{1}{\alpha_n}\Big(\frac{x_n}{z_n^*} - 1\Big) = \lambda \alpha_i z_i^*, \quad \text{soit} \quad x_i = z_i^*(1 + \lambda\alpha_i).$$

Pour $i = n$, la définition de λ donne $\lambda\alpha_n = \frac{x_n}{z_n^*} - 1$, soit $x_n = z_n^*(1 + \lambda\alpha_n)$. Pour tout i, comme $x_i > 0$, on a $1 + \lambda\alpha_i \neq 0$.

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!], \quad z_i^* = \frac{x_i}{1 + \lambda\alpha_i}.}$$

c) Pour $i \leqslant n-1$, $z_i^* > 0$ (définition de Ω), et $z_n^* > 0$ par a). Comme $x_i > 0$, $1 + \lambda\alpha_i = x_i / z_i^* > 0$, soit $\lambda > -1/\alpha_i$ (car $\alpha_i > 0$), et ce pour tout i.

$$\boxed{\lambda > \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\Big(-\frac{1}{\alpha_i}\Big) = \beta.}$$

d) On pose $\varphi(y) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i x_i^2}{(1+\alpha_i y)^2}$. Pour $y > \beta$ et tout i, $y > -1/\alpha_i$, donc $1 + \alpha_i y > 0$. Ainsi φ est définie et dérivable sur $]\beta, +\infty[$, avec

$$\varphi'(y) = -2\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i^2 x_i^2}{(1+\alpha_i y)^3} < 0.$$

φ est donc continue et strictement décroissante. Chaque terme tend vers 0 en $+\infty$, donc $\lim_{+\infty} \varphi = 0$. Soit i_0 tel que $-1/\alpha_{i_0} = \beta$. Quand $y \to \beta^+$, $1 + \alpha_{i_0} y \to 0^+$, donc le terme d'indice i_0 tend vers $+\infty$, et les autres sont positifs : $\lim_{\beta^+} \varphi = +\infty$.

y	β		$+\infty$
$\varphi(y)$	$+\infty$	$\searrow$	0

Par le théorème de la bijection (fonction continue et strictement monotone), φ réalise une bijection de $]\beta, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\exists!\, \lambda_0 \in]\beta, +\infty[, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i x_i^2}{(1 + \alpha_i \lambda_0)^2} = 1.}$$

On a $\beta < 0$, donc $0 \in]\beta, +\infty[$, et $\varphi(0) = \sum \alpha_i x_i^2 = q(x) > 1 = \varphi(\lambda_0)$, car $x \notin K$. Par stricte décroissance de φ :

$$\boxed{\lambda_0 > 0.}$$

Enfin, par a) et b), $1 = q(z^*) = \sum \alpha_i \frac{x_i^2}{(1+\lambda\alpha_i)^2} = \varphi(\lambda)$ avec $\lambda > \beta$ par c). Par unicité, $\lambda = \lambda_0$.

$$\boxed{z^* = \Big(\frac{x_1}{1 + \lambda_0\alpha_1}, \dots, \frac{x_n}{1 + \lambda_0\alpha_n}\Big).}$$

9. Identification de $p(x)$ et séparation.

a) Pour tout i, $x_i - z_i^* = z_i^*(1+\lambda_0\alpha_i) - z_i^* = \lambda_0\alpha_i z_i^*$, donc $x - z^* = \lambda_0(\alpha_1 z_1^*, \dots, \alpha_n z_n^*)$. Pour $z \in K$, comme $q(z^*) = 1$,

$$\langle z - z^*, x - z^*\rangle = \lambda_0\Big(\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i z_i^* - \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i^{*2}\Big) = \lambda_0\Big(\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i z_i^* - 1\Big).$$

Or $2z_iz_i^* \leqslant z_i^2 + z_i^{*2}$, donc $\sum \alpha_i z_i z_i^* \leqslant \frac{1}{2}(q(z) + q(z^*)) \leqslant 1$. Comme $\lambda_0 > 0$:

$$\boxed{\forall z \in K, \quad \langle z - z^*, x - z^*\rangle \leqslant 0.}$$

Comme $z^* \in K$, la caractérisation de la question 5c) donne :

$$\boxed{z^* = p(x).}$$

b) On pose $h = x - p(x) = \lambda_0(\alpha_i z_i^*)_i$ et $S = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i x_i^2}{1+\alpha_i\lambda_0}$, de sorte que $c = \frac{\lambda_0}{2}(1+S)$.

- Pour $z \in K$, d'après a), $\langle h, z\rangle = \lambda_0 \sum \alpha_i z_i^* z_i \leqslant \lambda_0$.
- $\langle h, x\rangle = \lambda_0 \sum \alpha_i z_i^* x_i = \lambda_0 \sum \frac{\alpha_i x_i^2}{1+\alpha_i\lambda_0} = \lambda_0 S$.
- En utilisant $x_i = z_i^*(1+\lambda_0\alpha_i)$, on a $S = \sum \alpha_i z_i^* x_i = \sum \alpha_i z_i^{*2}(1+\lambda_0\alpha_i) = 1 + \lambda_0 \sum \alpha_i^2 z_i^{*2} > 1$, car $\lambda_0 > 0$ et $z_n^* > 0$.

Comme $\lambda_0 > 0$ et $S > 1$, on a $\lambda_0 < \frac{\lambda_0}{2}(1+S) < \lambda_0 S$. Donc, pour tout $z \in K$, $\langle h, z\rangle \leqslant \lambda_0 < c < \lambda_0 S = \langle h, x\rangle$.

$$\boxed{\forall z \in K, \quad \langle x - p(x), z\rangle < c = \frac{\lambda_0}{2}\Big(1 + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i x_i^2}{1+\alpha_i\lambda_0}\Big) < \langle x - p(x), x\rangle.}$$

Partie III – Une séparation de deux convexes

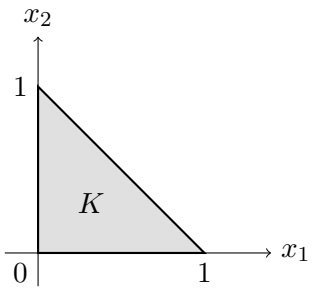
Partie III – L'ensemble $\mathcal{B}_n$

$K \in \mathcal{B}_n$: (i) convexe, fermée, bornée, contenue dans $\{x \geqslant \vec{0}\}$; (ii) il existe $\bar{x} \in K$ à coordonnées strictement positives ; (iii) $x \in K$ et $x \geqslant y \geqslant \vec{0}$ entraînent $y \in K$. $g(x) = \prod_{i=1}^n x_i$.

Corrigé – Partie III.

10. Un exemple dans $\mathbb{R}^2$.

On prend $K = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_1 + x_2 \leqslant 1\}$. Ce triangle est convexe (intersection de demi-plans), fermé (images réciproques d'intervalles fermés par des fonctions continues), borné et contenu dans $\{x \geqslant \vec{0}\}$. Il contient $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Si $x \in K$ et $x \geqslant y \geqslant \vec{0}$, alors $y_1 + y_2 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant 1$, donc $y \in K$.



$$\boxed{K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant \vec{0},\ x_1 + x_2 \leqslant 1\} \in \mathcal{B}_2.}$$

11. Stricte concavité de ln**.**

Soient $0 < a < b$. Pour $t \in [0,1]$, on pose $\chi(t) = \ln(ta + (1-t)b) - t\ln a - (1-t)\ln b$, où $ta + (1-t)b \geqslant a > 0$. χ est de classe C^2 sur $[0,1]$, avec

$$\chi'(t) = \frac{a-b}{ta+(1-t)b} - \ln a + \ln b, \qquad \chi''(t) = -\frac{(a-b)^2}{(ta+(1-t)b)^2} < 0.$$

Donc χ' est strictement décroissante. Comme $\chi(0) = \chi(1) = 0$, le théorème de Rolle fournit $t_0 \in]0,1[$ tel que $\chi'(t_0) = 0$. Alors $\chi' > 0$ sur $[0,t_0[$ et $\chi' < 0$ sur $]t_0,1]$: χ est strictement croissante sur $[0,t_0]$ et strictement décroissante sur $[t_0,1]$. Pour $t \in]0,t_0]$, $\chi(t) > \chi(0) = 0$, et pour $t \in [t_0,1[$, $\chi(t) > \chi(1) = 0$.

$$\boxed{\forall\, 0 < a < b,\ \forall t \in]0,1[, \quad \ln(ta + (1-t)b) > t\ln a + (1-t)\ln b,}$$

$$\boxed{\ln \text{ est strictement concave sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

12. Maximum de g **sur** K**.**

a) g est polynomiale, donc continue sur K. K est fermée, bornée et non vide (ii). Par le théorème des bornes atteintes :

$$\boxed{g \text{ admet un maximum sur } K.}$$

b) Par (ii), il existe $\bar{x} \in K$ tel que $\bar{x}_i > 0$ pour tout i. Donc $g(u) \geqslant g(\bar{x}) > 0$. Comme $u \geqslant \vec{0}$ par (i) et $\prod u_i \neq 0$, aucune coordonnée n'est nulle.

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!], \quad u_i > 0.}$$

c) On raisonne par contraposée : soient $u \neq v$ deux points de K tels que $g(u) = g(v) = M = \max_K g$, et montrons que M n'est pas le maximum. Par b), $u_i > 0$ et $v_i > 0$ pour tout i, et $M > 0$. Par convexité, $m = \frac{u+v}{2} \in K$. Pour chaque i :

- si $u_i \neq v_i$, la question 11 avec $t = \frac{1}{2}$ (et $a = \min(u_i, v_i)$, $b = \max(u_i, v_i)$) donne $\ln \frac{u_i+v_i}{2} > \frac{1}{2}(\ln u_i + \ln v_i)$;
- si $u_i = v_i$, il y a égalité.

Il existe au moins un indice i tel que $u_i \neq v_i$. En sommant,

$$\ln g(m) = \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{u_i + v_i}{2} > \frac{1}{2}(\ln g(u) + \ln g(v)) = \ln M,$$

donc $g(m) > M$, ce qui contredit la maximalité de M.

$$\boxed{\text{Le vecteur } u \text{ de } K \text{ tel que } g(u) = \max_K g \text{ est unique.}}$$

13. L'ensemble F.

a) *Lemme.* Soit $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $a_i > 0$ pour tout i, et $b = (1/a_1, \dots, 1/a_n)$. Alors $a \otimes K \in \mathcal{B}_n$, et $y \in a \otimes K \iff b \otimes y \in K$.
On note $D = \max a_i$ et $D' = \max b_i$. Pour tout y, $\|a \otimes y\|^2 = \sum a_i^2 y_i^2 \leqslant D^2 \|y\|^2$, et de même $\|b \otimes y\| \leqslant D'\|y\|$. L'équivalence vient de $b \otimes (a \otimes x) = x$ et $a \otimes (b \otimes y) = y$.

- *Convexe* : $t(a \otimes x) + (1-t)(a \otimes x') = a \otimes (tx + (1-t)x') \in a \otimes K$.
- *Bornée* : si $\|x\| \leqslant R$ sur K, alors $\|a \otimes x\| \leqslant DR$.
- *Contenue dans* $\{x \geqslant \vec{0}\}$: $a_i x_i \geqslant 0$.
- *Fermée* : soit $y \notin a \otimes K$, alors $b \otimes y \notin K$. Le complémentaire de K est ouvert, donc il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(b \otimes y, r)$ ne rencontre pas K. Si $\|y' - y\| < r/D'$, alors $\|b \otimes y' - b \otimes y\| < r$, donc $b \otimes y' \notin K$, soit $y' \notin a \otimes K$. Le complémentaire de $a \otimes K$ est donc ouvert.
- *(ii)* : $a \otimes \bar{x}$ a toutes ses coordonnées strictement positives.
- *(iii)* : si $y = a \otimes x$ avec $x \in K$, et $y \geqslant y' \geqslant \vec{0}$, alors $x = b \otimes y \geqslant b \otimes y' \geqslant \vec{0}$ (on multiplie par $b_i > 0$), donc $b \otimes y' \in K$ et $y' \in a \otimes K$.

Par 12b), $\phi_i^*(K) > 0$, et $F = a \otimes K$ avec $a = (\frac{1}{\phi_1^*(K)}, \dots, \frac{1}{\phi_n^*(K)})$.

$$\boxed{F \in \mathcal{B}_n.}$$

b) Soit $y \in F$, $y = a \otimes x$ avec $x \in K$. Alors $\prod y_i = \frac{g(x)}{g(\phi^*(K))} \leqslant 1$, car $g(\phi^*(K)) = \max_K g > 0$.

$$\boxed{\forall y \in F, \quad \prod_{i=1}^n y_i \leqslant 1.}$$

14. L'ensemble A.

a) Les fonctions $\pi_i : x \mapsto x_i$ et $g : x \mapsto \prod x_i$ sont continues sur $\mathbb{R}^n$ (polynomiales), et

$$A = \bigcap_{i=1}^n \pi_i^{-1}([0, +\infty[) \cap g^{-1}([1, +\infty[).$$

C'est une intersection finie de fermés (son complémentaire est une réunion finie d'ouverts).

$$\boxed{A \text{ est fermé.}}$$

b) Soient $x, y \in A$ et $t \in [0,1]$. Comme $\prod x_i \geqslant 1$ et $x \geqslant \vec{0}$, on a $x_i > 0$ pour tout i, et de même $y_i > 0$. On pose $w = tx + (1-t)y$, de sorte que $w_i > 0$. Pour chaque i, $\ln w_i \geqslant t \ln x_i + (1-t) \ln y_i$. C'est une égalité si $x_i = y_i$ ou si $t \in \{0, 1\}$. Sinon, c'est la question 11, appliquée au couple $(\min(x_i, y_i), \max(x_i, y_i))$ avec le paramètre t ou $1-t$. En sommant :

$$\ln \prod_{i=1}^n w_i \geqslant t \ln \prod_{i=1}^n x_i + (1-t) \ln \prod_{i=1}^n y_i \geqslant 0.$$

Donc $\prod w_i \geqslant 1$, $w \geqslant \vec{0}$, et $w \in A$.

$$\boxed{A \text{ est convexe.}}$$

15. $A \cap F = \{\vec{1}\}$ **et séparation.**

$\vec{1} = a \otimes \phi^*(K) \in F$ et $\vec{1} \in A$. Réciproquement, soit $y \in A \cap F$, $y = a \otimes x$ avec $x \in K$. Par 13b) et la définition de A, $\prod y_i = 1$, donc $g(x) = g(\phi^*(K)) = \max_K g$. Par 12c), $x = \phi^*(K)$, d'où $y = \vec{1}$.

$$\boxed{A \cap F = \{\vec{1}\}.}$$

On vérifie les hypothèses du résultat admis, avec $K_1 = F$, $K_2 = A$ et $x_0 = \vec{1}$.

- F et A sont des convexes fermés (13a, 14).
- $F \neq \{\vec{1}\}$: par (iii) appliqué à $\vec{1} \in F$ et $\vec{1} \geqslant \vec{0} \geqslant \vec{0}$, on a $\vec{0} \in F$.
- A contient la boule ouverte de centre $2\vec{1}$ et de rayon 1 : si $\|x - 2\vec{1}\| < 1$, alors $|x_i - 2| < 1$, donc $x_i > 1$ pour tout i, et $\prod x_i > 1$.

Il existe donc $h \neq \vec{0}$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que $\langle h, y\rangle \leqslant c \leqslant \langle h, x\rangle$ pour tous $y \in F$ et $x \in A$. Avec $x = y = \vec{1}$, on obtient $c = \langle h, \vec{1}\rangle$.

$$\boxed{\exists\, h \neq \vec{0},\ \forall x \in A,\ \forall y \in F, \quad \langle h, y\rangle \leqslant \langle h, \vec{1}\rangle \leqslant \langle h, x\rangle.}$$

16. Les coordonnées de h **sont strictement positives.**

a) On a $v_k = k \sum_{i=1}^n h_i$. Si $\vec{0} \geqslant h$ avec $h \neq \vec{0}$, toutes les coordonnées sont négatives ou nulles et l'une est strictement négative, donc $\sum h_i < 0$.

$$\boxed{\lim_{k \to +\infty} v_k = -\infty.}$$

Or, pour $k \geqslant 1$, $k\vec{1} \geqslant \vec{0}$ et $\prod_{i=1}^n k = k^n \geqslant 1$, donc $k\vec{1} \in A$, et la question 15 donne $v_k \geqslant \langle h, \vec{1}\rangle$: la suite (v_k) est minorée, ce qui est contradictoire.

$$\boxed{\exists\, i_0 \in [\![1, n]\!], \quad h_{i_0} > 0.}$$

b) Comme $h_{i_1} \leqslant 0 < h_{i_0}$, on a $i_1 \neq i_0$, et $w^{(k)}$ est bien défini. On a $w^{(k)} \geqslant \vec{0}$ et $\prod w_i^{(k)} = \frac{1}{k} \cdot k \cdot 1 = 1$, donc $w^{(k)} \in A$ et $z_k \geqslant \langle h, \vec{1}\rangle$ pour tout k. On a

$$z_k = \frac{h_{i_0}}{k} + k h_{i_1} + \sum_{i \neq i_0, i_1} h_i.$$

- Si $h_{i_1} < 0$: $z_k \to -\infty$, ce qui contredit $z_k \geqslant \langle h, \vec{1}\rangle$.
- Si $h_{i_1} = 0$: $z_k \to \sum_{i \neq i_0, i_1} h_i = \langle h, \vec{1}\rangle - h_{i_0}$. Par passage à la limite dans l'inégalité large, $\langle h, \vec{1}\rangle - h_{i_0} \geqslant \langle h, \vec{1}\rangle$, soit $h_{i_0} \leqslant 0$: contradiction.

$$\boxed{(z_k) \text{ tend vers } -\infty \text{ ou vers } \langle h, \vec{1}\rangle - h_{i_0} < \langle h, \vec{1}\rangle \ ;\ \text{donc } \forall i \in [\![1, n]\!],\ h_i > 0.}$$

17. Les coordonnées de h **sont égales.**

Soient $i \neq j$. On utilise, comme ci-dessus, des vecteurs de A de produit 1. Pour $t > 0$, on note $w(t)$ le vecteur défini par $w_i(t) = t$, $w_j(t) = \frac{1}{t}$ et $w_k(t) = 1$ pour $k \neq i, j$. Alors $w(t) \geqslant \vec{0}$, $\prod w_k(t) = 1$, donc $w(t) \in A$, et

$$\psi(t) = \langle h, w(t)\rangle = h_i t + \frac{h_j}{t} + \sum_{k \neq i,j} h_k \geqslant \langle h, \vec{1}\rangle = \psi(1).$$

ψ est dérivable sur l'intervalle ouvert $]0,+\infty[$ et admet un minimum en 1, donc $\psi'(1) = h_i - h_j = 0$.

$$\boxed{h_1 = h_2 = \cdots = h_n, \quad \text{soit } h = h_1\vec{1} \text{ avec } h_1 > 0.}$$

Alors $\langle h, y\rangle = h_1 \sum y_i$, $\langle h, \vec{1}\rangle = nh_1$ et $\langle h, x\rangle = h_1 \sum x_i$. On divise l'encadrement de la question 15 par $h_1 > 0$.

$$\boxed{\forall x \in A,\ \forall y \in F, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i \leqslant n \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i.}$$

Partie IV – La solution de Nash

Partie IV – Règles de partage

$\phi : \mathcal{B}_n \to \mathbb{R}^n$; propriétés P1 (pas d'accord meilleur pour tous), P2 ($\phi(a \otimes K) = a \otimes \phi(K)$), P3 ($K \subset K'$, $\phi(K') \in K \Rightarrow \phi(K') = \phi(K)$), P4 ($\phi(K[i,j]) = \phi(K)[i,j]$).

Corrigé – Partie IV.

18. Interprétations.

- **P1 : optimalité.** L'accord retenu est réalisable, et il n'existe aucun autre accord qui donne à chacun au moins autant et à l'un au moins strictement plus.
- **P2 : invariance par changement d'échelle.** Si l'on change l'unité de mesure du gain de chaque personne (multiplication par $a_i > 0$), la solution est transformée de la même manière.
- **P3 : invariance par élimination d'options non pertinentes.** Si l'on retire des accords possibles (on passe de K' à K) sans retirer l'accord choisi, le choix ne change pas.
- **P4 : symétrie.** Échanger les rôles de deux personnes échange leurs gains dans la solution : aucune personne n'est favorisée par son rang.

P1 : optimalité ; P2 : invariance par changement d'échelle ; P3 : invariance par élimination d'options non pertinentes ; P4 : symétrie.

19. ϕ^* vérifie P1, P2, P3, P4.

- **P1.** $\phi^*(K) \in K$ par définition. Soit $x \in K$ tel que $x \geqslant \phi^*(K)$ et $x \neq \phi^*(K)$. Alors $x_i \geqslant \phi_i^*(K) > 0$ pour tout i (12b), avec $x_k > \phi_k^*(K)$ pour un indice k. Un produit de réels strictement positifs croît strictement quand on augmente strictement l'un des facteurs, donc $g(x) > g(\phi^*(K))$, ce qui contredit la maximalité.
- **P2.** Par le lemme de 13a), $a \otimes K \in \mathcal{B}_n$. Pour $y = a \otimes x \in a \otimes K$,

  $$g(y) = \Big(\prod a_i\Big) g(x) \leqslant \Big(\prod a_i\Big) g(\phi^*(K)) = g(a \otimes \phi^*(K)),$$

  et $a \otimes \phi^*(K) \in a \otimes K$. C'est donc le point de maximum de g sur $a \otimes K$, qui est unique par 12c) : $\phi^*(a \otimes K) = a \otimes \phi^*(K)$.

- **P3.** Si $K \subset K'$ et $\phi^*(K') \in K$, alors pour tout $x \in K \subset K'$, $g(x) \leqslant g(\phi^*(K'))$. Donc $\phi^*(K')$ maximise g sur K, et par unicité $\phi^*(K') = \phi^*(K)$.
- **P4.** On note $\sigma : x \mapsto x[i,j]$. σ est linéaire, vérifie $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}$ et $\|\sigma(x)\| = \|x\|$, et $K[i,j] = \{x \mid \sigma(x) \in K\} = \sigma(K)$. On vérifie que $K[i,j] \in \mathcal{B}_n$: elle est convexe (σ est linéaire), bornée (σ conserve la norme) et contenue dans $\{x \geqslant \vec{0}\}$ (les coordonnées sont permutées). Elle est fermée : si $y \notin K[i,j]$, il existe $r > 0$ tel que $B(\sigma(y), r) \cap K = \emptyset$, et pour $\|y' - y\| < r$, $\|\sigma(y') - \sigma(y)\| < r$, donc $y' \notin K[i,j]$. Elle vérifie (ii) avec $\sigma(\bar{x})$. Elle vérifie (iii) : si $x \in K[i,j]$ et $x \geqslant y \geqslant \vec{0}$, alors $\sigma(x) \geqslant \sigma(y) \geqslant \vec{0}$, donc $\sigma(y) \in K$. Enfin $g \circ \sigma = g$. Pour $x \in K[i,j]$, $g(x) = g(\sigma(x)) \leqslant g(\phi^*(K)) = g(\sigma(\phi^*(K)))$, avec $\sigma(\phi^*(K)) \in K[i,j]$, car $\sigma(\sigma(\phi^*(K))) = \phi^*(K) \in K$. Par unicité, $\phi^*(K[i,j]) = \phi^*(K)[i,j]$.

$\boxed{\phi^* \text{ vérifie P1, P2, P3 et P4.}}$

20. Unicité de la règle.

a) $K_0 \in \mathcal{B}_n$. K_0 est convexe : c'est une intersection de demi-espaces, et si $x, y \in K_0$, $tx + (1-t)y \geqslant \vec{0}$ et $\sum(tx_i + (1-t)y_i) \leqslant tn + (1-t)n = n$. Il est fermé (images réciproques de $[0, +\infty[$ et de $]-\infty, n]$ par des fonctions linéaires continues) et borné ($0 \leqslant x_i \leqslant n$). Il contient $\vec{1}$, et si $x \in K_0$ et $x \geqslant y \geqslant \vec{0}$, alors $\sum y_i \leqslant \sum x_i \leqslant n$.

Calcul. La somme des coordonnées est invariante par échange, donc $K_0[i,j] = K_0$ pour tous $i \neq j$. P4 donne $\phi(K_0) = \phi(K_0)[i,j]$, c'est-à-dire $\phi_i(K_0) = \phi_j(K_0)$. Ainsi $\phi(K_0) = c\vec{1}$. Par P1, $c\vec{1} \in K_0$, donc $nc \leqslant n$, soit $c \leqslant 1$. Si $c < 1$, alors $\vec{1} \in K_0$, $\vec{1} \geqslant c\vec{1}$ et $\vec{1} \neq c\vec{1}$, ce qui contredit P1. Donc $c = 1$.

$\boxed{\phi(K_0) = \vec{1}.}$

b) Soit $y \in F$. On a $y \geqslant \vec{0}$ ($F \in \mathcal{B}_n$), et la question 17 donne $\sum y_i \leqslant n$. Donc $F \subset K_0$, avec $F, K_0 \in \mathcal{B}_n$, et $\phi(K_0) = \vec{1} \in F$ (question 15). Par P3 avec $K = F$ et $K' = K_0$, $\phi(K_0) = \phi(F)$.

$\boxed{\phi(F) = \vec{1}.}$

Or $F = a \otimes K$ avec $a_i = 1/\phi_i^*(K) > 0$. Par P2, $\vec{1} = \phi(F) = a \otimes \phi(K)$, soit $\frac{\phi_i(K)}{\phi_i^*(K)} = 1$ pour tout i.

$\boxed{\phi(K) = \phi^*(K) \text{ pour tout } K \in \mathcal{B}_n.}$

Conclusion : ϕ^* (maximisation du produit des gains) est l'unique règle de partage vérifiant P1, P2, P3 et P4 : c'est la solution de Nash.