

HEC Paris – ESCP Europe

Mathématiques I

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2010

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1	Projection sur un convexe fermé	2
	<i>Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; fonctions de plusieurs variables ; Python.</i>	2
2	Un cas particulier	3
	<i>Thèmes abordés : Fonctions de plusieurs variables ; espaces vectoriels.</i>	3
3	Une séparation de deux convexes	4
	<i>Thèmes abordés : Fonctions d'une variable ; espaces vectoriels.</i>	4
4	La solution de Nash	5
	<i>Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; algèbre bilinéaire.</i>	5

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, et $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Le produit scalaire et la norme associée sont notés respectivement $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\|\cdot\|$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on note $x \geq y$ si $x_i \geq y_i$ pour tout $i \in [1, n]$. Le vecteur nul est noté $\vec{0}$ et le vecteur dont toutes les composantes valent 1 est noté $\vec{1}$.

On rappelle ou on admet les résultats suivants : une partie non vide K de $\mathbb{R}^n$ est convexe si, pour tout couple (u, v) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et tout $t \in [0, 1]$, le vecteur $tu + (1 - t)v$ appartient à K ; l'image réciproque par une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

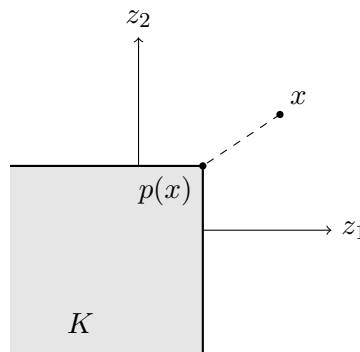
On dit qu'un vecteur h de $\mathbb{R}^n$ sépare deux convexes K_1 et K_2 s'il existe un réel c tel que, pour tous $u \in K_1$ et $v \in K_2$, $\langle h, u \rangle < c < \langle h, v \rangle$. Si K est une partie non vide et convexe de $\mathbb{R}^n$, et $x \in \mathbb{R}^n$, la projection de x sur K , lorsqu'elle existe, est notée $p(x)$; elle vérifie $\|x - p(x)\| = \min_{z \in K} \|x - z\|$.

1 Projection sur un convexe fermé

Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; fonctions de plusieurs variables ; Python.

- Exemple 1.** Soit $K = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \mid z_1 \leq 1 \text{ et } z_2 \leq 1\}$ et $x = (x_1, x_2) \notin K$ tel que $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$.

- Montrer que K est convexe et fermé. K est-il borné ?
- Établir l'existence et l'unicité de la projection $p(x)$ de x sur K . La déterminer.
- Représenter le convexe K , le vecteur x et la projection $p(x)$.



- Écrire une fonction Python `distance(x1, x2)` qui, à tout vecteur $x = (x_1, x_2) \notin K$ tel que $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$, associe le réel $\|x - p(x)\|$.

```
def distance(x1, x2):
    return ((max(x1 - 1, 0))**2 + (max(x2 - 1, 0))**2)**0.5
```

- Vérifier que, pour tout $z \in K$, $\langle z - p(x), x - p(x) \rangle \leq 0$.
 - Montrer qu'il existe un réel c tel que, pour tout $z \in K$, $\langle x - p(x), z \rangle < c < \langle x - p(x), x \rangle$.
- Exemple 2.** Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, différent de $\{\vec{0}\}$ et de $\mathbb{R}^n$.
 - Montrer que E est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$. On admet qu'elle est fermée.
 - Dans cette question, $E = \{w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{R}^4 \mid w_1 + w_2 - w_3 - w_4 = 0\}$. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \notin E$. Déterminer $\min_{w \in E} \|x - w\|$ et le vecteur $p(x)$.
 - Cas général.** Soit K une partie convexe, fermée et non vide de $\mathbb{R}^n$, et $x \notin K$.
 - Soit $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, $f(z) = \|x - z\|$. Justifier la continuité de f .

- b) Soit $z_0 \in K$, B_0 la boule fermée de centre x et de rayon $\|x - z_0\|$, et $K' = B_0 \cap K$. Justifier que K' est fermée et bornée.
- c) En déduire que f admet un minimum sur K' . Soit $\hat{z}$ tel que $f(\hat{z}) = \min_{z \in K'} f(z)$.
- d) Montrer que $\|x - z\| \geq \|x - \hat{z}\|$ pour tout $z \in K$. Conclure.
4. a) Vérifier, pour tous $a, b \in \mathbb{R}^n$, l'identité $\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\|^2 + \frac{1}{4}\|a - b\|^2 = \frac{1}{2}\|x - a\|^2 + \frac{1}{2}\|x - b\|^2$.
- b) Posons $d = \min_{z \in K} \|x - z\|$. Si $u, v \in K$ vérifient $d = \|x - u\| = \|x - v\|$, montrer à l'aide de la question précédente que $u = v$. Conclure.
5. On rappelle que $p(x)$ désigne la projection de x sur K .
- a) Établir, pour tout $z \in K$ et tout $t \in [0, 1]$, $\|x - p(x)\|^2 \leq \|x - (tz + (1-t)p(x))\|^2$.
- b) En déduire, pour tout $z \in K$, $\langle z - p(x), x - p(x) \rangle \leq 0$.
- c) Réciproquement, s'il existe $y \in K$ tel que, pour tout $z \in K$, $\langle z - y, x - y \rangle \leq 0$, montrer que $y = p(x)$. Conclure.
- d) Établir $\langle x - p(x), p(x) \rangle < \langle x - p(x), x \rangle$ et conclure que $x - p(x)$ sépare K et $\{x\}$.

2 Un cas particulier

Thèmes abordés : Fonctions de plusieurs variables ; espaces vectoriels.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels strictement positifs et $K = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i^2 \leq 1\}$. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \notin K$, avec $x_i > 0$ pour tout i . Posons $K_0 = \{z \in K \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i^2 = 1\}$ et $K_1 = \{z \in K \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i^2 < 1\}$.

6. Montrer que K est convexe, fermé et borné.
7. Soit $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, $f(z) = \|x - z\|^2$.
- a) Montrer que f est de classe C^1 sur l'ouvert K_1 .
- b) La restriction de f à K_1 admet-elle des points critiques ? En déduire que $p(x) \in K_0$.
- c) Montrer que les coordonnées de $p(x)$ sont positives ou nulles, non toutes nulles.
8. On définit $\Omega = \{(z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \forall i \in [1, n-1], z_i > 0 \text{ et } (z_1, \dots, z_{n-1}, 0) \in K_1\}$. Soient

$$\Psi(z_1, \dots, z_{n-1}) = \sqrt{\frac{1}{\alpha_n} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i z_i^2\right)},$$

$$H(z_1, \dots, z_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - z_i)^2 + (x_n - \Psi(z_1, \dots, z_{n-1}))^2.$$

On suppose que $(z_1^*, \dots, z_{n-1}^*)$ est un point critique de H . On note $z_n^* = \Psi(z_1^*, \dots, z_{n-1}^*)$ et $z^* = (z_1^*, \dots, z_n^*)$.

- a) Montrer que $z_n^* > 0$ et que $z^* \in K_0$.
- b) En posant $\lambda = \frac{1}{\alpha_n} \left(\frac{x_n}{z_n^*} - 1\right)$, montrer que $z_i^* = \frac{x_i}{1 + \lambda \alpha_i}$ pour tout $i \in [1, n]$.
- c) Posons $\beta = \max_{1 \leq i \leq n} (-1/\alpha_i)$. Montrer que $\lambda > \beta$.
- d) Étudier sur $]\beta, +\infty[$ la fonction $y \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i x_i^2}{(1 + \alpha_i y)^2}$. En déduire l'existence d'un unique réel λ_0 vérifiant $\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i x_i^2}{(1 + \alpha_i y)^2} = 1$. Montrer que $\lambda_0 > 0$ et expliciter z^* en fonction de λ_0 , des α_i et des x_i .

9. a) Établir, pour tout $z \in K$, $\langle z - z^*, x - z^* \rangle \leq 0$. En déduire que $z^* = p(x)$.
- b) Montrer que $c = \frac{\lambda_0}{2} \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i x_i^2}{(1 + \alpha_i \lambda_0)^2} \right)$ vérifie, pour tout $z \in K$, $\langle x - p(x), z \rangle < c < \langle x - p(x), x \rangle$.

3 Une séparation de deux convexes

Thèmes abordés : Fonctions d'une variable ; espaces vectoriels.

On admet : si K_1 et K_2 sont deux convexes fermés de $\mathbb{R}^n$ tels que $K_1 \cap K_2 = \{x_0\}$, il existe un vecteur non nul $h \in \mathbb{R}^n$ et un réel c tels que, pour tout $x \in K_1$ et tout $y \in K_2$, $\langle h, x \rangle \leq c \leq \langle h, y \rangle$.

On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des parties K de $\mathbb{R}^n$ vérifiant : (i) K est convexe, fermée, bornée et contenue dans $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq \vec{0}\}$; (ii) il existe $x \in K$ dont toutes les coordonnées sont strictement positives ; (iii) pour tout $x \in K$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$, $[x \geq y \geq \vec{0}] \Rightarrow y \in K$.

10. Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ un exemple d'élément K de $\mathcal{B}_n$. Dans toute la suite, on se donne un élément K de $\mathcal{B}_n$.
11. On dit que $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement concave si, pour tous $a < b$ de $\mathbb{R}_+^*$ et tout $t \in]0, 1[$, $f(ta + (1-t)b) > tf(a) + (1-t)f(b)$. Montrer que $\ln$ est strictement concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
12. Soit $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = g(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i$.
- a) Justifier que g admet un maximum sur K .
- b) Si $u \in K$ vérifie $g(u) = \max_{x \in K} g(x)$, montrer que $u_i > 0$ pour tout i .
- c) Établir l'unicité de u .
13. Notons $\phi^*(K) = (\phi_1^*(K), \dots, \phi_n^*(K))$ l'unique vecteur de K où g atteint son maximum. Posons $F = \left\{ \left(\frac{x_1}{\phi_1^*(K)}, \dots, \frac{x_n}{\phi_n^*(K)} \right) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1, \dots, x_n) \in K \right\}$.
- a) Montrer que $F \in \mathcal{B}_n$.
- b) Montrer que, pour tout $y \in F$, $\prod_{i=1}^n y_i \leq 1$.
14. Posons $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq \vec{0} \text{ et } \prod_{i=1}^n x_i \geq 1\}$.
- a) Montrer que A est fermé.
- b) En utilisant la question 11, montrer que A est convexe.
15. Établir $A \cap F = \{\vec{1}\}$. En déduire l'existence d'un vecteur non nul h vérifiant, pour tout $x \in A$ et tout $y \in F$, $\langle h, y \rangle \leq \langle h, \vec{1} \rangle \leq \langle h, x \rangle$.
16. Montrer que les coordonnées de h sont toutes strictement positives :
- a) sous l'hypothèse $\vec{0} \geq h$, poser $v_k = \langle h, k\vec{1} \rangle$ et aboutir à une contradiction ;
- b) si $h_{i_1} \leq 0$, définir, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $w^{(k)}$ par $w_{i_0}^{(k)} = 1/k$, $w_{i_1}^{(k)} = k$ et $w_i^{(k)} = 1$ sinon, puis étudier $z_k = \langle h, w^{(k)} \rangle$ et conclure.
17. En utilisant un raisonnement semblable, montrer que toutes les coordonnées de h sont égales. En déduire que, pour tout $x \in A$ et tout $y \in F$, $\sum_{i=1}^n y_i \leq n \leq \sum_{i=1}^n x_i$.

4 La solution de Nash

Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; algèbre bilinéaire.

Un élément K de $\mathcal{B}_n$ représente un problème de négociation : x_i mesure le gain de la personne i , et le statu quo est $\vec{0}$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $(i, j) \in [1, n]^2$, $i \neq j$, on note $x[i, j]$ le vecteur obtenu en échangeant les coordonnées de rangs i et j . Pour $a, x \in \mathbb{R}^n$, $a \otimes x = (a_1x_1, \dots, a_nx_n)$, et $a \otimes K = \{a \otimes x \mid x \in K\}$.

Une règle de partage est une application $\phi : \mathcal{B}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$. On s'intéresse aux règles vérifiant :

P1 : pour tout $K \in \mathcal{B}_n$, $\phi(K) \in K$ et il n'existe pas $x \in K$ tel que $x \neq \phi(K)$ et $x \geq \phi(K)$;

P2 : pour tout $K \in \mathcal{B}_n$ et $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $a_i > 0$ pour tout i , $\phi(a \otimes K) = a \otimes \phi(K)$;

P3 : pour tous $K, K' \in \mathcal{B}_n$ tels que $K \subset K'$ et $\phi(K') \in K$, $\phi(K') = \phi(K)$;

P4 : pour tout $K \in \mathcal{B}_n$ et tout couple (i, j) d'entiers distincts, $\phi(K[i, j]) = (\phi(K))[i, j]$.

18. Les propriétés P1, P2, P3 et P4 ont chacune une interprétation en termes de symétrie, d'impartialité, d'invariance par changement d'échelle ou d'invariance par élimination d'options non pertinentes (dans le désordre). Associer à chacune son interprétation et justifier très brièvement.

19. Montrer que ϕ^* , définie à la question 13, vérifie P1, P2, P3 et P4.

20. Soit ϕ une règle satisfaisant P1, P2, P3 et P4.

a) Posons $K_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq \vec{0} \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i \leq n\}$. À l'aide de P1 et P4, montrer que $\phi(K_0) = \vec{1}$.

b) Soit $K \in \mathcal{B}_n$ et F l'ensemble défini à la question 13. À l'aide de P3 et de la question 17, montrer que $\phi(F) = \vec{1}$. En déduire que $\phi(K) = \phi^*(K)$. Conclure.