

HEC Paris – ESCP Europe

Mathématiques approfondies – Mathématiques II

Corrigé du sujet adapté – 2010

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté. Pour $a > 0$, une variable de loi $\gamma(a)$ admet la densité f_{X_a} rappelée dans l'énoncé ; la loi exponentielle de paramètre 1 est la loi $\gamma(1)$.

Partie I – Quelques résultats préliminaires

Partie I – Constante d'Euler, lois gamma, quotients

$$h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \gamma_n = h_n - \ln n, X_t \hookrightarrow \gamma(t), \psi = \Gamma'/\Gamma, T_{\alpha,\beta} = X_\alpha/X_\beta, Q_{\alpha,\beta} = \ln T_{\alpha,\beta}.$$

Corrigé – Partie I.

1. La constante d'Euler.

a) Pour $n \geq 1$, $v_n = h_{n+1} - h_n - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Par concavité de $\ln$, $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$. Avec $x = \frac{1}{n}$: $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.

Avec $x = -\frac{1}{n+1}$: $\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1}$, soit $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{n+1}$. Ainsi

$$0 \leq -v_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}.$$

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge ; par comparaison de séries à termes positifs, $\sum(-v_n)$ converge.

La série $\sum v_n$ converge.

b) Pour $n \geq 2$, $\gamma_n = \gamma_1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k$. Par a), le membre de droite admet une limite finie quand $n \rightarrow +\infty$.

$$(\gamma_n) \text{ converge, vers } \gamma = \gamma_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k.$$

c) $d_{n,t} = \gamma + \ln(t+n) - h_n = \gamma - \gamma_n + \ln\left(\frac{t+n}{n}\right) = \gamma - \gamma_n + \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right)$. Par b) et continuité de $\ln$ en 1 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_{n,t} = 0.$$

2. Moments de X_t et de $\ln(X_t)$.

a) On sait que :

$$\mathbb{E}(X_t) = t, \quad \mathbb{V}(X_t) = t.$$

- b) Par le théorème de transfert, $\ln(X_t)$ admet une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} (\ln x) \frac{e^{-x} x^{t-1}}{\Gamma(t)} dx$ converge absolument. Cette intégrale converge et vaut $\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$; elle converge absolument, car l'intégrande est de signe constant sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$. De même, $\mathbb{E}((\ln X_t)^2) = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^{+\infty} (\ln x)^2 e^{-x} x^{t-1} dx = \frac{\Gamma''(t)}{\Gamma(t)}$. Donc $\mathbb{E}(\ln X_t) = \psi(t)$. Par la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(\ln X_t) = \frac{\Gamma''(t)}{\Gamma(t)} - \frac{\Gamma'(t)^2}{\Gamma(t)^2} = \frac{\Gamma''(t)\Gamma(t) - \Gamma'(t)^2}{\Gamma(t)^2} = \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)'(t) = \psi'(t).$$

$$\boxed{\mathbb{E}(\ln(X_t)) = \psi(t), \quad \mathbb{V}(\ln(X_t)) = \psi'(t).}$$

3. Inégalités.

- a) Par le théorème de transfert, $\mathbb{E}(1/X_t)$ existe si et seulement si $\frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-2} dx$ converge (intégrande positive). C'est le cas pour $t-1 > 0$, et l'intégrale vaut $\Gamma(t-1)$. Comme $\Gamma(t) = (t-1)\Gamma(t-1)$:

$$\boxed{\forall t > 1, \quad \mathbb{E}\left(\frac{1}{X_t}\right) = \frac{\Gamma(t-1)}{\Gamma(t)} = \frac{1}{t-1}.$$

De même, pour $t > 2$, $\mathbb{E}(1/X_t^2) = \frac{\Gamma(t-2)}{\Gamma(t)} = \frac{1}{(t-1)(t-2)}$; ce résultat servira en c).

- b) Soit $g(x) = x - 1 - \ln x$ sur $]0, +\infty[$. On a $g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$: g décroît sur $]0, 1]$, croît sur $[1, +\infty[$, et $g(1) = 0$. Donc $\ln x \leq x - 1$. En appliquant ceci à $\frac{1}{x}$, on obtient $-\ln x \leq \frac{1}{x} - 1$, soit $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$.

$$\boxed{\forall x > 0, \quad 1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1.}$$

Si $x \geq 1$, on a $0 \leq \ln x \leq x - 1$, donc $(\ln x)^2 \leq (x - 1)^2$. Si $0 < x < 1$, on a $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x < 0$, donc $(\ln x)^2 \leq \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$. Dans les deux cas :

$$\boxed{(\ln x)^2 \leq \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + (x - 1)^2.}$$

- c) Les variables considérées admettent une espérance, par 2b) et 3a). On applique b) avec $x = X_t/t$, puis la croissance de l'espérance.

- $\mathbb{E}\left(\ln \frac{X_t}{t}\right) \leq \mathbb{E}\left(\frac{X_t}{t} - 1\right) = \frac{t}{t} - 1 = 0$.
- Pour $t > 1$: $\mathbb{E}\left(\ln \frac{X_t}{t}\right) \geq \mathbb{E}\left(1 - \frac{t}{X_t}\right) = 1 - \frac{t}{t-1} = -\frac{1}{t-1}$.
- Pour $t > 2$: $\mathbb{E}\left(\left(\frac{X_t}{t} - 1\right)^2\right) = \frac{\mathbb{V}(X_t)}{t^2} = \frac{1}{t}$ et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\left(1 - \frac{t}{X_t}\right)^2\right) &= 1 - \frac{2t}{t-1} + \frac{t^2}{(t-1)(t-2)} \\ &= \frac{(t-1)(t-2) - 2t(t-2) + t^2}{(t-1)(t-2)} = \frac{t+2}{(t-1)(t-2)}. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{2t}{(t-2)^2} - \frac{t+2}{(t-1)(t-2)} - \frac{1}{t} = \frac{3t^2 - 4t + 4}{t(t-1)(t-2)^2} \geq 0,$$

car le trinôme $3t^2 - 4t + 4$ a un discriminant $-32 < 0$. D'où $\mathbb{E}\left(\ln^2 \frac{X_t}{t}\right) \leq \frac{t+2}{(t-1)(t-2)} + \frac{1}{t} \leq \frac{2t}{(t-2)^2}$.

$$\boxed{-\frac{1}{t-1} \leq \mathbb{E}\left(\ln \frac{X_t}{t}\right) \leq 0 \quad (t > 1), \quad \mathbb{E}\left(\ln^2 \frac{X_t}{t}\right) \leq \frac{2t}{(t-2)^2} \quad (t > 2).}$$

- d) Soit $\varepsilon > 0$ et $Z_n = \ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right)$. Pour $n > 2 - t$, on a $t+n > 2$. L'inégalité de Markov appliquée à la variable positive Z_n^2 et c) donnent

$$\mathbb{P}(|Z_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(Z_n^2 > \varepsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}(Z_n^2)}{\varepsilon^2} \leq \frac{2(t+n)}{\varepsilon^2(t+n-2)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\boxed{\ln\left(\frac{X_{t+n}}{t+n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0.}$$

4. Un lemme de convergence.

- a) Si $|A_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $|B_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et $|C_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, alors $|D_n| \leq |A_n| + |B_n| + |C_n| \leq \varepsilon$. Par contraposée :

$$\boxed{[|D_n| > \varepsilon] \subset [|A_n| > \varepsilon/3] \cup [|B_n| > \varepsilon/3] \cup [|C_n| > \varepsilon/3].}$$

Donc $\mathbb{P}(|D_n| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|A_n| > \frac{\varepsilon}{3}) + \mathbb{P}(|B_n| > \frac{\varepsilon}{3}) + \mathbb{P}(|C_n| > \frac{\varepsilon}{3})$, et chaque terme tend vers 0.

$$\boxed{D_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.}$$

- b) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $u_n \rightarrow u$, il existe n_0 tel que $|u_n - u| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $n \geq n_0$. Pour ces n , $|V_n| \leq |D_n| + |u_n - u|$, donc $[|V_n| > \varepsilon] \subset [|D_n| > \frac{\varepsilon}{2}]$, et $\mathbb{P}(|V_n| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|D_n| > \frac{\varepsilon}{2}) \rightarrow 0$. Ensuite, $((N+u) + V_n) - (N+u) = V_n$.

$$\boxed{V_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad (N+u) + V_n \xrightarrow{\mathbb{P}} N+u.}$$

- c) Par le résultat admis, $(N+u) + V_n$ converge en loi vers $N+u$. Comme N est à densité, F_{N+u} est continue sur $\mathbb{R}$. Par définition de la convergence en loi, pour tout réel x , $\mathbb{P}((N+u) + V_n \leq x) \rightarrow F_{N+u}(x)$. Or $(N+u) + V_n = N + D_n + u_n$ a la même loi que M pour tout n . La suite ci-dessus est donc constante, égale à $F_M(x)$. Ainsi $F_M = F_{N+u}$.

$$\boxed{M \text{ et } N+u \text{ ont la même loi.}}$$

5. Quotient de deux variables gamma indépendantes.

- a) X_α et X_β sont à valeurs dans $]0, +\infty[$, donc $T_{\alpha,\beta}$ aussi, et $Q_{\alpha,\beta}$ est à valeurs réelles.

$$\boxed{Q_{\alpha,\beta}(\Omega) \subset \mathbb{R}.}$$

Soit F la fonction de répartition de $\ln X_\alpha$. Pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \mathbb{P}(X_\alpha \leq e^x) = F_{X_\alpha}(e^x)$. Comme f_{X_α} est continue sur $]0, +\infty[$, F_{X_α} y est de classe $\mathcal{C}^1$. F est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $F'(x) = e^x f_{X_\alpha}(e^x)$. De même, $\mathbb{P}(-\ln X_\beta \leq x) = \mathbb{P}(X_\beta \geq e^{-x}) = 1 - F_{X_\beta}(e^{-x})$, de dérivée $e^{-x} f_{X_\beta}(e^{-x})$.

$$\boxed{f_{\ln X_\alpha}(x) = \frac{e^{\alpha x} \exp(-e^x)}{\Gamma(\alpha)}, \quad f_{-\ln X_\beta}(x) = \frac{e^{-\beta x} \exp(-e^{-x})}{\Gamma(\beta)} \quad (x \in \mathbb{R}).}$$

- b) $\ln X_\alpha$ et $-\ln X_\beta$ sont indépendantes, comme fonctions des variables indépendantes X_α et X_β , et $Q_{\alpha,\beta} = \ln X_\alpha + (-\ln X_\beta)$. Leurs densités sont continues et bornées (elles tendent vers 0 en $\pm\infty$). Par le théorème de convolution, une densité de $Q_{\alpha,\beta}$ est

$$\begin{aligned} f_{Q_{\alpha,\beta}}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\ln X_\alpha}(y) f_{-\ln X_\beta}(x-y) dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha y} e^{-e^y} e^{-\beta x + \beta y} e^{-e^y e^{-x}} dy, \end{aligned}$$

la convergence de l'intégrale étant établie en c).

$$f_{Q_{\alpha,\beta}}(x) = \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha+\beta)y} \exp(-e^y(1+e^{-x})) dy.$$

- c) Soit x fixé et $c = 1+e^{-x} > 0$. L'application $\varphi : y \mapsto ce^y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. C'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$, avec $du = ce^y dy = u dy$. Le changement de variable $u = \varphi(y)$ montre que l'intégrale de b) a la même nature que

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{c}\right)^{\alpha+\beta} e^{-u} \frac{du}{u} = \frac{1}{c^{\alpha+\beta}} \int_0^{+\infty} u^{\alpha+\beta-1} e^{-u} du = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+e^{-x})^{\alpha+\beta}},$$

qui converge, et qu'elle lui est égale. Puis $e^{-\beta x}(1+e^{-x})^{-(\alpha+\beta)} = e^{-\beta x} e^{(\alpha+\beta)x} (e^x + 1)^{-(\alpha+\beta)}$, d'où :

$$f_{Q_{\alpha,\beta}}(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \frac{e^{\alpha x}}{(1+e^x)^{\alpha+\beta}}.$$

- d) $T_{\alpha,\beta} = e^{Q_{\alpha,\beta}} > 0$. Pour $z \leq 0$, $F_T(z) = 0$. Pour $z > 0$, $F_T(z) = \mathbb{P}(Q_{\alpha,\beta} \leq \ln z) = F_Q(\ln z)$. Comme f_Q est continue, F_Q est de classe $\mathcal{C}^1$. F_T est donc dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $\frac{1}{z} f_Q(\ln z) = \frac{z^{\alpha-1}}{B(\alpha,\beta)(1+z)^{\alpha+\beta}}$.

$$f_{T_{\alpha,\beta}}(z) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \frac{z^{\alpha-1}}{(1+z)^{\alpha+\beta}} \quad (z > 0), \quad f_{T_{\alpha,\beta}}(z) = 0 \quad (z \leq 0).$$

- e) $J_{\alpha,\beta} = \frac{X_\alpha/X_\beta}{X_\alpha/X_\beta + 1} = \frac{T_{\alpha,\beta}}{1+T_{\alpha,\beta}} \in]0, 1[$. Donc $F_J(z) = 0$ pour $z \leq 0$ et $F_J(z) = 1$ pour $z \geq 1$. La fonction $s \mapsto \frac{s}{1+s}$ est une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$, de réciproque $z \mapsto \frac{z}{1-z}$. Pour $z \in]0, 1[$, on a donc $F_J(z) = F_T\left(\frac{z}{1-z}\right)$, de dérivée

$$\frac{1}{(1-z)^2} f_T\left(\frac{z}{1-z}\right) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \frac{1}{(1-z)^2} \frac{z^{\alpha-1}}{(1-z)^{\alpha-1}} (1-z)^{\alpha+\beta} = \frac{z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)},$$

car $1 + \frac{z}{1-z} = \frac{1}{1-z}$.

$$f_{J_{\alpha,\beta}}(z) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta-1} \quad (z \in]0, 1[), \quad 0 \text{ sinon.}$$

Partie II – Étude de la variable aléatoire $\ln(X_t)$

Partie II – Représentation de $\ln(X_t)$

(Y_k) i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1)$, $S_k = \sum_{i=1}^k Y_i$, $R_{t,k} = \frac{X_t + S_{k-1}}{X_t + S_k}$, $X_\alpha, Y_1, Y_2, \dots$ mutuellement indépendantes.

Corrigé – Partie II.

On utilisera plusieurs fois le fait suivant. Si $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendantes à densité, si $A'_1, \dots, A'_n$ le sont aussi, et si A_i et A'_i ont même loi pour tout i , alors $\sum A_i$ et $\sum A'_i$ ont même loi. En effet, par le théorème de convolution (et le lemme des coalitions), une densité de la somme se calcule de proche en proche à partir des seules densités des termes.

6. Loi de S_k .

Les Y_i sont indépendantes de loi $\gamma(1)$. Par stabilité des lois gamma :

$$S_k \hookrightarrow \gamma(k), \quad \mathbb{E}(S_k) = \mathbb{V}(S_k) = k.$$

7. Deux identités.

a) Toutes les quantités $X_t + S_k$ sont strictement positives. Le produit est télescopique :

$$\prod_{k=1}^n \frac{X_t + S_{k-1}}{X_t + S_k} = \frac{X_t + S_0}{X_t + S_n} = \frac{X_t}{X_t + S_n}.$$

Donc $\ln\left(\prod_{k=1}^n \frac{X_t + S_{k-1}}{X_t + S_k}\right) + \ln(X_t + S_n) = \ln X_t - \ln(X_t + S_n) + \ln(X_t + S_n)$.

$$\ln(X_t) = \ln\left(\prod_{k=1}^n \frac{X_t + S_{k-1}}{X_t + S_k}\right) + \ln(X_t + S_n).$$

b) $X_t, Y_1, \dots, Y_m$ sont mutuellement indépendantes, de lois $\gamma(t), \gamma(1), \dots, \gamma(1)$. Par stabilité des lois gamma par somme :

$$X_t + S_m \hookrightarrow \gamma(t + m).$$

8. Indépendance des $R_{t,k}$.

a) $R_{t,1} = \frac{X_t}{X_t + Y_1}$ et $R_{t,2} = \frac{X_t + Y_1}{X_t + Y_1 + Y_2}$. Comme $X_t \hookrightarrow \gamma(t)$ et $Y_1 \hookrightarrow \gamma(1)$ sont indépendantes, le troisième résultat admis (avec $\alpha = t, \beta = 1$) montre que $R_{t,1}$ et $X_t + Y_1$ sont indépendantes. Par ailleurs, Y_2 est indépendante du couple (X_t, Y_1) (lemme des coalitions). Pour tous intervalles I, J, K , l'événement $[R_{t,1} \in I] \cap [X_t + Y_1 \in J]$ ne dépend que de (X_t, Y_1) , donc

$$\mathbb{P}([R_{t,1} \in I] \cap [X_t + Y_1 \in J] \cap [Y_2 \in K]) = \mathbb{P}(R_{t,1} \in I) \mathbb{P}(X_t + Y_1 \in J) \mathbb{P}(Y_2 \in K).$$

Ainsi $R_{t,1}$, $X_t + Y_1$ et Y_2 sont mutuellement indépendantes. On applique le premier résultat admis avec $A_1 = R_{t,1}$, $A_2 = X_t + Y_1$, $A_3 = Y_2$, $p = 1$, $\varphi_1 = \text{id}$ et $\varphi_2(a, b) = \frac{a}{a+b}$, continue sur $]0, +\infty[^2$. Comme $R_{t,2} = \varphi_2(X_t + Y_1, Y_2)$:

$$R_{t,1} \text{ et } R_{t,2} \text{ sont indépendantes.}$$

- b) Par 7a), $\ln X_t = \Sigma_n + \ln(X_t + S_n)$ avec $\Sigma_n = \sum_{k=1}^n \ln R_{t,k}$. D'après le résultat admis, $R_{t,1}, \dots, R_{t,n}, X_t + S_n$ sont mutuellement indépendantes ; par le lemme des coalitions, Σ_n et $\ln(X_t + S_n)$ sont indépendantes. D'autre part, Σ_n est une fonction de $(X_t, Y_1, \dots, Y_n)$, donc Σ_n et $\ln X_{t+n}$ sont indépendantes. Enfin, par 7b), $\ln(X_t + S_n)$ et $\ln(X_{t+n})$ ont même loi. Ces variables sont à densité (5a pour $\ln X_{t+n}$, et 9b pour les $\ln R_{t,k}$). Par le fait rappelé en tête de partie, $\Sigma_n + \ln(X_t + S_n)$ et $\Sigma_n + \ln X_{t+n}$ ont même loi.

$$\ln(X_t) \text{ et } \sum_{k=1}^n \ln(R_{t,k}) + \ln(X_{t+n}) \text{ ont même loi.}$$

9. Loi des $R_{t,k}$.

- a) $U \in]0, 1]$, donc $-\ln U \geq 0$. Pour $x < 0$, $\mathbb{P}(-\ln U \leq x) = 0$. Pour $x \geq 0$, $\mathbb{P}(-\ln U \leq x) = \mathbb{P}(U \geq e^{-x}) = 1 - e^{-x}$.

$$-\ln U \hookrightarrow \mathcal{E}(1).$$

- b) On a $R_{t,k} = \frac{A}{A+Y_k}$ avec $A = X_t + S_{k-1} \hookrightarrow \gamma(t+k-1)$ (par 7b, ou $A = X_t$ si $k=1$). $Y_k \hookrightarrow \gamma(1)$ est indépendante de A , fonction de $(X_t, Y_1, \dots, Y_{k-1})$ (lemme des coalitions). Par 5e) avec $\alpha = t+k-1$ et $\beta = 1$, $R_{t,k}$ a la loi de $J_{t+k-1,1}$. Or $B(t+k-1, 1) = \frac{\Gamma(t+k-1)\Gamma(1)}{\Gamma(t+k)} = \frac{1}{t+k-1}$.

$$f_{R_{t,k}}(z) = (t+k-1)z^{t+k-2} \quad (z \in]0, 1]), \quad 0 \text{ sinon.}$$

- c) Soit $a = t+k-1 > 0$ et $V = U_k^{1/a} \in]0, 1]$. Pour $z \in [0, 1]$, $\mathbb{P}(V \leq z) = \mathbb{P}(U_k \leq z^a) = z^a$. De plus, $F_V(z) = 0$ pour $z < 0$ et $F_V(z) = 1$ pour $z \geq 1$. Pour $z \in]0, 1[$, $F'_V(z) = az^{a-1}$. V admet donc la même densité que $R_{t,k}$; elles ont même fonction de répartition.

$$R_{t,k} \text{ et } U_k^{1/(t+k-1)} \text{ ont même loi.}$$

- d) Par c) et a), $\ln R_{t,k+1}$ a la loi de $\frac{1}{t+k} \ln U_{k+1} = -\frac{1}{t+k}(-\ln U_{k+1})$, donc celle de $-\frac{Y_{k+1}}{t+k}$ (même fonction appliquée à deux variables de même loi $\mathcal{E}(1)$). Dans 8b), les variables $\ln R_{t,1}, \dots, \ln R_{t,n}, \ln X_{t+n}$ sont mutuellement indépendantes : les $R_{t,k}$ le sont, et X_{t+n} est indépendante de $(X_t, Y_1, \dots, Y_n)$. Les variables $-\frac{Y_1}{t}, \dots, -\frac{Y_n}{t+n-1}, \ln X_{t+n}$ le sont aussi (hypothèse de la partie). Par le fait rappelé et 8b), $\ln X_t$ a la loi de $-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{Y_{k+1}}{t+k} + \ln X_{t+n}$. Enfin, $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = h_n$ et $d_{n,t} - \gamma = \ln(t+n) - h_n$, donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} + \ln \left(\frac{X_{t+n}}{t+n} \right) + d_{n,t} - \gamma = h_n + \ln X_{t+n} - \ln(t+n) + \ln(t+n) - h_n = \ln X_{t+n}.$$

$$\ln(X_t) \text{ a la loi de } \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{Y_{k+1}}{t+k} \right) + \ln \left(\frac{X_{t+n}}{t+n} \right) + d_{n,t} - \gamma.$$

10. Espérance et variance de $\ln(X_t)$.

Deux variables de même loi ont même espérance et même variance. On applique ceci à 9d), avec $\mathbb{E}(Y_{k+1}) = \mathbb{V}(Y_{k+1}) = 1$, et on note $Z_n = \ln \left(\frac{X_{t+n}}{t+n} \right)$. Par linéarité :

$$\psi(t) = \mathbb{E}(\ln X_t) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{t+k} \right) + \mathbb{E}(Z_n) + d_{n,t} - \gamma.$$

Pour $n > 1 - t$, 3c) donne $-\frac{1}{t+n-1} \leq \mathbb{E}(Z_n) \leq 0$, donc $\mathbb{E}(Z_n) \rightarrow 0$ par le théorème d'encadrement. Par 1c), $d_{n,t} \rightarrow 0$. La somme partielle converge donc vers $\psi(t) + \gamma$.

Les variables $Y_1, \dots, Y_n, X_{t+n}$ sont mutuellement indépendantes. La variance d'une somme de variables indépendantes est la somme des variances, donc

$$\psi'(t) = \mathbb{V}(\ln X_t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(t+k)^2} + \mathbb{V}(Z_n).$$

Pour $n > 2 - t$, par 3c), $0 \leq \mathbb{V}(Z_n) \leq \mathbb{E}(Z_n^2) \leq \frac{2(t+n)}{(t+n-2)^2} \rightarrow 0$.

$$\mathbb{E}(\ln X_t) = \psi(t) = -\gamma + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{t+k} \right), \quad \mathbb{V}(\ln X_t) = \psi'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(t+k)^2}.$$

11. Comportement de ψ en $+\infty$.

Par 2b), $\psi(t) - \ln t = \mathbb{E}(\ln X_t) - \ln t = \mathbb{E}\left(\ln \frac{X_t}{t}\right)$. Par 3c), pour $t > 1$, $-\frac{1}{t-1} \leq \psi(t) - \ln t \leq 0$. Par le théorème d'encadrement :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\psi(t) - \ln t) = 0.$$

12. Estimation de μ .

Comme $W = U^{1/\mu}$, on a $-\ln W = \frac{1}{\mu}(-\ln U)$. Par 9a) et la transformation affine d'une variable à densité, $-\ln W \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$, d'espérance $\frac{1}{\mu}$ et de variance $\frac{1}{\mu^2}$. Presque sûrement, $W_i \in]0, 1[$, donc $\sum \ln W_i < 0$. Ainsi $G_p = \frac{p}{\sum_{i=1}^p (-\ln W_i)}$ est une fonction de l'échantillon qui ne dépend pas de μ :

$$G_p \text{ est un estimateur de } \mu.$$

Biais. Les $\mu(-\ln W_i)$ sont indépendantes de loi $\mathcal{E}(1) = \gamma(1)$. Par stabilité des lois gamma, $Z = \mu \sum_{i=1}^p (-\ln W_i) \hookrightarrow \gamma(p)$, et $G_p = \frac{p\mu}{Z}$. Par 3a) ($p > 1$) :

$$\mathbb{E}(G_p) = p\mu \mathbb{E}\left(\frac{1}{Z}\right) = \frac{p\mu}{p-1} \neq \mu.$$

$$G_p \text{ est biaisé : } \mathbb{E}(G_p) - \mu = \frac{\mu}{p-1}.$$

Convergence. Les $-\ln W_i$ sont indépendantes, de même loi, d'espérance $\frac{1}{\mu}$ et de variance finie. Par la loi faible des grands nombres, $\bar{L}_p = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (-\ln W_i) \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{\mu}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$, et $\bar{L}_p > 0$ presque sûrement. Par composition par une fonction continue, $G_p = \frac{1}{\bar{L}_p} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$.

$$G_p \text{ est un estimateur convergent de } \mu.$$

13. Simulation.

- a) Soit $\lambda > 0$ et R la variable simulée par `rd.random()`, de loi uniforme sur $[0, 1[$. $V = 1 - R$ suit la loi uniforme sur $]0, 1]$: pour $x \in [0, 1]$, $\mathbb{P}(V \leq x) = \mathbb{P}(R \geq 1 - x) = x$. Par 9a), $-\ln V \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. Pour $x \geq 0$, $\mathbb{P}\left(-\frac{\ln V}{\lambda} \leq x\right) = \mathbb{P}(-\ln V \leq \lambda x) = 1 - e^{-\lambda x}$, et cette probabilité est nulle pour $x < 0$.

$$\text{x_simulee(lam)} \text{ simule la loi exponentielle } \mathcal{E}(\lambda).$$

- b) On somme n simulations indépendantes de la loi $\mathcal{E}(1) = \gamma(1)$. Par stabilité des lois gamma, la somme suit la loi $\gamma(n)$.

```
def g(n):
    s = 0
    for i in range(n):
        s = s + x_simulee(1)
    return s
```

- c) $m(p)$ renvoie une réalisation de $\frac{p}{X_p}$, où $X_p = E_1 + \dots + E_p$ est une somme de p variables indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$. C'est aussi une réalisation de G_p pour $\mu = 1$, car alors $-\ln W_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. Par 12, $\frac{p}{X_p}$ converge en probabilité vers 1 : pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{p}{X_p} - 1\right| > \varepsilon\right) \rightarrow 0$.

Pour p grand, les valeurs renvoyées par $m(p)$ sont proches de 1.

Partie III – Quelques propriétés de la fonction Γ

Partie III – Formules de Wilks, de Legendre et de Stirling

Les notations sont celles des parties précédentes.

Corrigé – Partie III.

14. Première application : les formules de Wilks et Legendre.

- a) On sépare dans le membre de gauche les indices pairs $k = 2j$ et impairs $k = 2j + 1$, pour $0 \leq j \leq n - 1$. Comme $\frac{2}{t+2j} = \frac{1}{\frac{t}{2}+j}$ et $\frac{2}{t+2j+1} = \frac{1}{\frac{t+1}{2}+j}$, on obtient

$$2 \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{a_{k+1}}{t+k} \right) = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{2}{2j+1} + \frac{2}{2j+2} - \frac{a_{2j+1}}{\frac{t}{2}+j} - \frac{a_{2j+2}}{\frac{t+1}{2}+j} \right).$$

Or $\frac{2}{2j+1} + \frac{2}{2j+2} = \frac{1}{j+1} + \frac{1}{j+1} + 2 \left(\frac{1}{2j+1} - \frac{1}{2j+2} \right)$, car $\frac{2}{2j+2} = \frac{1}{j+1}$.

$$2 \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{a_{k+1}}{t+k} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{a_{2k+1}}{\frac{t}{2}+k} \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{a_{2k+2}}{\frac{t+1}{2}+k} \right) + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right).$$

- b) On a $h_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+2}$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{2}h_n$. Donc $w_n = h_{2n} - \frac{1}{2}h_n - \frac{1}{2}h_n$.

$$w_n = h_{2n} - h_n.$$

Ainsi $w_n = \gamma_{2n} + \ln(2n) - \gamma_n - \ln n = \gamma_{2n} - \gamma_n + \ln 2$, et $\gamma_{2n} - \gamma_n \rightarrow \gamma - \gamma = 0$ par 1b).

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ln 2.$$

- c) On pose $M = 2 \ln X_t$ et $N = \ln X_{\frac{t}{2}} + \ln X_{\frac{t+1}{2}}$, variables à densité (5a et théorème de convolution). Pour tout n , on considère, comme en 8b), une variable $X_{t+2n} \hookrightarrow \gamma(t+2n)$ indépendante de $(X_{\frac{t}{2}}, X_{\frac{t+1}{2}}, Y_1, \dots, Y_{2n})$.

Écriture de M . Par 9d) au rang $2n$, $\ln X_t$ a la loi de $-\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{Y_{k+1}}{t+k} + \ln X_{t+2n}$. En effet, comme on l'a vu en 9d), les termes constants se compensent. En multipliant par 2 et en séparant les indices pairs et impairs comme en a) (avec $a_k = Y_k$), M a la loi de

$$L'_n + 2 \ln X_{t+2n}, \quad \text{où} \quad L'_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{Y_{2k+1}}{\frac{t}{2} + k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{Y_{2k+2}}{\frac{t+1}{2} + k}.$$

Écriture de N . On pose $S'_k = \sum_{i=1}^k Y_{2i-1}$ et $S''_k = \sum_{i=1}^k Y_{2i}$. $(Y_{2i-1})_i$ et $(Y_{2i})_i$ sont deux suites i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1)$. On note $R'_k = \frac{X_{t/2} + S'_{k-1}}{X_{t/2} + S'_k}$ et $R''_k = \frac{X_{(t+1)/2} + S''_{k-1}}{X_{(t+1)/2} + S''_k}$. Par 7a) :

$$N = L_n + P_n, \quad L_n = \sum_{k=1}^n \ln R'_k + \sum_{k=1}^n \ln R''_k, \quad P_n = \ln(X_{\frac{t}{2}} + S'_n) + \ln(X_{\frac{t+1}{2}} + S''_n).$$

Par les résultats de 8 et 9 appliqués à $X_{t/2}$ et à la suite (Y_{2i-1}) , les R'_k sont mutuellement indépendantes, et $\ln R'_{k+1}$ a la loi de $-\frac{Y_{2k+1}}{\frac{t}{2} + k}$. De même, les R''_k sont mutuellement indépendantes, et $\ln R''_{k+1}$ a la loi de $-\frac{Y_{2k+2}}{\frac{t+1}{2} + k}$. Les deux familles sont indépendantes (lemme des coalitions) : les R'_k sont fonctions de $(X_{t/2}, Y_1, Y_3, \dots)$, et les R''_k de $(X_{(t+1)/2}, Y_2, Y_4, \dots)$. Enfin, X_{t+2n} est indépendante de L_n et de L'_n . Par le fait rappelé en partie II, $L_n + 2 \ln X_{t+2n}$ et $L'_n + 2 \ln X_{t+2n}$ ont même loi. Donc M a la loi de

$$L_n + 2 \ln X_{t+2n} = N - P_n + 2 \ln X_{t+2n} = N + A_n + B_n + C_n + u_n,$$

avec

$$A_n = -\ln \left(\frac{X_{\frac{t}{2}} + S'_n}{\frac{t}{2} + n} \right), \quad B_n = -\ln \left(\frac{X_{\frac{t+1}{2}} + S''_n}{\frac{t+1}{2} + n} \right), \quad C_n = 2 \ln \left(\frac{X_{t+2n}}{t+2n} \right),$$

$$\begin{aligned} u_n &= 2 \ln(t+2n) - \ln \left(\frac{t}{2} + n \right) - \ln \left(\frac{t+1}{2} + n \right) \\ &= \ln \left(\frac{4(t+2n)^2}{(t+2n)(t+2n+1)} \right) = \ln \left(\frac{4(t+2n)}{t+2n+1} \right). \end{aligned}$$

Convergences. Par 7b), $X_{t/2} + S'_n \hookrightarrow \gamma(\frac{t}{2} + n)$. La probabilité $\mathbb{P}(|A_n| > \varepsilon)$ ne dépend que de cette loi ; par 3d) appliquée à $\frac{t}{2}$, elle tend vers 0. De même pour B_n (3d avec $\frac{t+1}{2}$). Pour C_n : $\mathbb{P}(|C_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}\left(\left|\ln \frac{X_{t+2n}}{t+2n}\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$, qui est une suite extraite de la suite de 3d), donc tend vers 0. Les variables A_n, B_n, C_n sont à densité, et $u_n \rightarrow \ln 4 = 2 \ln 2$. Par la question 4, M a la loi de $N + 2 \ln 2$.

$2 \ln(X_t) \text{ a la même loi que } \ln(X_{\frac{t}{2}}) + \ln(X_{\frac{t+1}{2}}) + 2 \ln 2.$

- d) Avec $t = 2s$, la question c) donne : $2 \ln X_{2s}$ a la loi de $\ln X_s + \ln X_{s+\frac{1}{2}} + 2 \ln 2$, où X_s et $X_{s+\frac{1}{2}}$ sont indépendantes. Soit $r > 0$. Si deux variables Z et Z' ont

même loi, alors e^{rZ} et $e^{rZ'}$ aussi : pour $y > 0$, $\mathbb{P}(e^{rZ} \leq y) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{\ln y}{r}\right)$. Or $e^{2r \ln X_{2s}} = (X_{2s})^{2r}$ et $e^{r(\ln X_s + \ln X_{s+1/2} + 2 \ln 2)} = 2^{2r} (X_s)^r (X_{s+1/2})^r$.

$$(X_{2s})^{2r} \text{ et } 2^{2r} (X_s)^r (X_{s+1/2})^r \text{ ont même loi.}$$

- e) Pour $a > 0$ et $r > 0$, par le théorème de transfert, $\mathbb{E}(X_a^r) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^{a+r-1} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(a+r)}{\Gamma(a)}$ (intégrale convergente). On prend $s = \frac{1}{2}$ dans d). $X_{1/2}$ et X_1 sont indépendantes, donc $X_{1/2}^r$ et X_1^r aussi. Deux variables de même loi ont même espérance, d'où

$$\Gamma(2r+1) = \mathbb{E}(X_1^{2r}) = 2^{2r} \mathbb{E}(X_{1/2}^r) \mathbb{E}(X_1^r) = 2^{2r} \frac{\Gamma(r + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \Gamma(r+1).$$

Avec $\Gamma(2r+1) = 2r\Gamma(2r)$, $\Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$ et $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, on obtient $2r\Gamma(2r)\sqrt{\pi} = 2^{2r} r\Gamma(r)\Gamma(r + \frac{1}{2})$.

$$2^{2r-1} \Gamma(r) \Gamma(r + \frac{1}{2}) = \Gamma(2r) \sqrt{\pi}.$$

15. Deuxième application : la formule de Stirling.

- a) Pour $u > 0$, $\frac{1}{u(u+1)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}$. En élevant au carré :

$$\frac{1}{u^2(u+1)^2} = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{(u+1)^2} - \frac{2}{u(u+1)} = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{(u+1)^2} - \frac{2}{u} + \frac{2}{u+1}.$$

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = -2, \quad d = 2.$$

Avec $u = t + k$ et $N \in \mathbb{N}$, on somme :

$$\sum_{k=0}^N \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2} = \sum_{k=0}^N \frac{1}{(t+k)^2} + \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{(t+k)^2} - 2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+N+1} \right),$$

car la dernière somme est télescopique. Quand $N \rightarrow +\infty$, par 10, le membre de droite tend vers $\psi'(t) + \left(\psi'(t) - \frac{1}{t^2} \right) - \frac{2}{t}$. La série converge donc, et $\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2} = \psi'(t) - \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{t}$.

$$\psi'(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2}.$$

- b) On applique l'encadrement admis à $u = t + k$, puis on somme pour $0 \leq k \leq N$. Les sommes sont télescopiques :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(t + \frac{1}{14})^3} - \frac{1}{(t + N + 1 + \frac{1}{14})^3} \right) &\leq \sum_{k=0}^N \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2} \\ &\leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{(t+N+1)^3} \right). \end{aligned}$$

On fait tendre N vers $+\infty$ et on utilise a) :

$$\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{6(t + \frac{1}{14})^3} \leq \psi'(t) - \frac{1}{t} \leq \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{6t^3}.$$

On pose $\varphi_1(t) = \psi(t) - \ln t + \frac{1}{2t} + \frac{1}{12t^2}$ et $\varphi_2(t) = \psi(t) - \ln t + \frac{1}{2t} + \frac{1}{12(t + \frac{1}{14})^2}$. Ces fonctions sont dérivables sur $]0, +\infty[$, avec

$$\varphi_1'(t) = \psi'(t) - \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{6t^3} \leq 0, \quad \varphi_2'(t) = \psi'(t) - \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{6(t + \frac{1}{14})^3} \geq 0.$$

Par 11, φ_1 et φ_2 tendent vers 0 en $+\infty$. φ_1 est décroissante de limite 0, donc $\varphi_1 \geq 0$; φ_2 est croissante de limite 0, donc $\varphi_2 \leq 0$.

$$\ln t - \frac{1}{2t} - \frac{1}{12t^2} \leq \psi(t) \leq \ln t - \frac{1}{2t} - \frac{1}{12(t + \frac{1}{14})^2}.$$

Ainsi $\frac{\psi(t)}{\ln t} \rightarrow 1$, car $\frac{\psi(t) - \ln t}{\ln t} \rightarrow 0$, et $t\psi'(t) \rightarrow 1$ par le premier encadrement multiplié par t .

$$\mathbb{E}(\ln X_t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \ln t, \quad \mathbb{V}(\ln X_t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t}.$$

- c) Γ est strictement positive et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et $(\ln \Gamma)' = \frac{\Gamma'}{\Gamma} = \psi$. Une primitive de $x \mapsto \psi(x) - \ln x + \frac{1}{2x}$ est $x \mapsto \ln \Gamma(x) - x \ln x + x + \frac{1}{2} \ln x = \ell(x)$, où l'on note $\ell(x) = \ln \left(\frac{\Gamma(x)}{x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}} \right)$.

$$\int_t^y \left(\psi(x) - \ln x + \frac{1}{2x} \right) dx = \ln \left(\frac{\Gamma(y)}{y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y}} \right) - \ln \left(\frac{\Gamma(t)}{t^{t-\frac{1}{2}} e^{-t}} \right).$$

Soit $g(x) = \psi(x) - \ln x + \frac{1}{2x}$. Par b), $0 \leq -g(x) \leq \frac{1}{12x^2}$ pour $x > 0$. L'intégrale $\int_t^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge ($t > 0$). Par comparaison de fonctions positives, $\int_t^{+\infty} g(x) dx$ converge. Donc $\ell(y) = \ell(t) + \int_t^y g(x) dx$ admet une limite finie quand $y \rightarrow +\infty$.

$$\theta = \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\Gamma(y)}{y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y}} \right) \text{ existe et vaut } \ell(t) + \int_t^{+\infty} g(x) dx.$$

- d) Pour $x > 0$, on écrit $\Gamma(y) = e^{\ell(y)} y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y}$ dans la formule 14e) avec $r = x$:

$$2^{2x-1} e^{\ell(x) + \ell(x+\frac{1}{2})} x^{x-\frac{1}{2}} \left(x + \frac{1}{2} \right)^x e^{-2x-\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi} e^{\ell(2x)} 2^{2x-\frac{1}{2}} x^{2x-\frac{1}{2}} e^{-2x}.$$

Après simplification, et avec l'identité $x^x = \left(x + \frac{1}{2} \right)^x \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{-x}$:

$$e^{\ell(x) + \ell(x+\frac{1}{2}) - \ell(2x)} = \sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{2}} \frac{x^x}{(x + \frac{1}{2})^x} = \sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{-x}.$$

Or $\left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{-x} = \exp \left(-x \ln \left(1 + \frac{1}{2x} \right) \right)$ et $x \ln \left(1 + \frac{1}{2x} \right) \rightarrow \frac{1}{2}$, car $\ln(1+h) \sim h$ en 0. Le membre de droite tend donc vers $\sqrt{2\pi}$. Par c), $\ell(x)$, $\ell(x + \frac{1}{2})$ et $\ell(2x)$ tendent vers θ ; le membre de gauche tend vers e^θ par continuité de l'exponentielle.

$$e^\theta = \sqrt{2\pi}.$$

Enfin, $\frac{\Gamma(x)}{x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}} = e^{\ell(x)} \rightarrow e^\theta = \sqrt{2\pi}$.

$$\Gamma(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}.$$