

HEC Paris – ESCP Europe

Mathématiques II

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2010

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1	Quelques résultats préliminaires	2
	<i>Thèmes abordés : suites ; séries ; intégrales généralisées ; variables à densité ; convergences de variables.</i>	2
2	Étude de la variable aléatoire $\ln(X_t)$	3
	<i>Thèmes abordés : variables à densité ; probabilités discrètes ; convergences de variables ; estimations ; Python.</i>	3
3	Quelques propriétés de la fonction Γ	5
	<i>Thèmes abordés : suites ; séries ; intégrales généralisées ; variables à densité.</i>	5

Dans tout le problème, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout réel $t > 0$, X_t désigne une variable aléatoire à valeurs strictement positives qui suit la loi gamma de paramètre t , notée $\gamma(t)$. La variable aléatoire U suit la loi uniforme sur $]0, 1]$. L'espérance et la variance d'une variable aléatoire A sont notées respectivement $\mathbb{E}(A)$ et $\mathbb{V}(A)$; la notation $\exp$ désigne la fonction exponentielle de base e .

On rappelle ou on admet sans démonstration les résultats suivants :

- la fonction Γ , définie pour tout réel $t > 0$ par $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{t-1} du$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$; on note Γ' et Γ'' ses dérivées premières et secondes. Pour tout $t > 0$, les intégrales $\int_0^{+\infty} (\ln u) e^{-u} u^{t-1} du$ et $\int_0^{+\infty} (\ln u)^2 e^{-u} u^{t-1} du$ sont convergentes et valent respectivement $\Gamma'(t)$ et $\Gamma''(t)$;
- pour tout réel $t > 0$, $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$;
- pour tout réel $t > 0$, une densité de X_t est donnée par

$$f_{X_t}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(t)} e^{-x} x^{t-1} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0; \end{cases}$$

— $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

L'objet du problème est de démontrer quelques propriétés de la fonction Γ en utilisant des méthodes essentiellement probabilistes.

1 Quelques résultats préliminaires

Thèmes abordés : suites ; séries ; intégrales généralisées ; variables à densité ; convergences de variables.

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. On considère les deux suites $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par $\gamma_n = h_n - \ln n$ et $v_n = \gamma_{n+1} - \gamma_n$.
 - a) Montrer que la série de terme général v_n est convergente.
 - b) En déduire la convergence de la suite $(\gamma_n)_{n \geq 1}$; on note γ sa limite.
 - c) Pour tout réel $t > 0$, on pose $d_{n,t} = \gamma + \ln(t+n) - h_n$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_{n,t}$.
2.
 - a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $\mathbb{E}(X_t)$ et $\mathbb{V}(X_t)$.
 - b) Pour tout réel $t > 0$, on note $\psi(t) = \Gamma'(t)/\Gamma(t)$, et ψ' la dérivée de ψ . Montrer que $\mathbb{E}(\ln(X_t)) = \psi(t)$ et $\mathbb{V}(\ln(X_t)) = \psi'(t)$.
3.
 - a) Montrer que, pour tout réel $t > 1$, $\mathbb{E}(1/X_t)$ existe et calculer sa valeur.
 - b) Établir, pour tout réel $x > 0$, l'encadrement $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$. En déduire que $(\ln x)^2 \leq \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + (x-1)^2$.
 - c) À l'aide des questions précédentes, établir les inégalités suivantes : pour tout réel $t > 0$, $\mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) \leq 0$; pour tout réel $t > 1$, $\mathbb{E}\left(\ln\left(\frac{X_t}{t}\right)\right) \geq -\frac{1}{t-1}$; pour tout réel $t > 2$,

$$\mathbb{E} \left(\ln^2 \left(\frac{X_t}{t} \right) \right) \leq \frac{2t}{(t-2)^2}.$$

- d) Soit t un réel fixé strictement positif. Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\ln \left(\frac{X_{t+n}}{t+n} \right) \right)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers 0.
4. Soient $(A_n)_{n \geq 1}$, $(B_n)_{n \geq 1}$ et $(C_n)_{n \geq 1}$ trois suites de variables aléatoires à densité qui convergent en probabilité vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $D_n = A_n + B_n + C_n$. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle qui converge vers u . On considère deux variables aléatoires réelles à densité M et N telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M est de même loi que $N + D_n + u_n$.
- a) Montrer, pour tout réel $\varepsilon > 0$, l'inclusion $[|D_n| > \varepsilon] \subset [|A_n| > \varepsilon/3] \cup [|B_n| > \varepsilon/3] \cup [|C_n| > \varepsilon/3]$. En déduire que $(D_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers 0.
- b) Posons $V_n = D_n + u_n - u$. Montrer que $(V_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers 0. En déduire la limite en probabilité de la suite $((N + u) + V_n)_{n \geq 1}$.
- c) On admet sans démonstration que la convergence en probabilité entraîne la convergence en loi. Montrer que les variables aléatoires M et $N + u$ sont de même loi.
5. Soit (α, β) un couple de réels strictement positifs, et X_α et X_β deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\gamma(\alpha)$ et $\gamma(\beta)$. On pose $T_{\alpha, \beta} = X_\alpha / X_\beta$, $Q_{\alpha, \beta} = \ln(T_{\alpha, \beta})$ et $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$.
- a) Préciser $Q_{\alpha, \beta}(\Omega)$. Déterminer une densité de $\ln(X_\alpha)$ et de $-\ln(X_\beta)$ respectivement.
- b) En déduire qu'une densité $f_{Q_{\alpha, \beta}}$ de $Q_{\alpha, \beta}$ est donnée, pour tout réel x , par

$$f_{Q_{\alpha, \beta}}(x) = \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha+\beta)y} \exp(-e^y(1+e^{-x})) dy.$$

- c) À l'aide du changement de variable $u = e^y(1+e^{-x})$, dont on justifiera la validité, établir, pour tout réel x , la formule

$$f_{Q_{\alpha, \beta}}(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \frac{e^{\alpha x}}{(1+e^x)^{\alpha+\beta}}.$$

- d) En déduire une densité de $T_{\alpha, \beta}$.
- e) On pose $J_{\alpha, \beta} = \frac{X_\alpha}{X_\alpha + X_\beta}$. Montrer qu'une densité de $J_{\alpha, \beta}$ est donnée par

$$f_{J_{\alpha, \beta}}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \notin]0, 1[, \\ \frac{1}{B(\alpha, \beta)} z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta-1} & \text{si } z \in]0, 1[. \end{cases}$$

2 Étude de la variable aléatoire $\ln(X_t)$

Thèmes abordés : variables à densité ; probabilités discrètes ; convergences de variables ; estimations ; Python.

Soit $(Y_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1. On suppose que, pour tout réel $\alpha > 0$, X_α est indépendante de chacune des variables aléatoires de la suite $(Y_k)_{k \geq 1}$. On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $S_k = \sum_{i=1}^k Y_i$.

6. Rappeler sans démonstration la loi de S_k ainsi que les valeurs respectives de $\mathbb{E}(S_k)$ et $\mathbb{V}(S_k)$.
7. a) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité $\ln(X_t) = \ln\left(\prod_{k=1}^n \frac{X_t + S_{k-1}}{X_t + S_k}\right) + \ln(X_t + S_n)$.
- b) Montrer que, pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, la loi de $X_t + S_m$ est celle de X_{t+m} .

On admet jusqu'à la fin du problème les résultats suivants :

- si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $A_1, \dots, A_n$ sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes, alors, pour tout $p \in [1, n-1]$, pour toutes fonctions réelles continues φ_1 et φ_2 , les variables aléatoires $\varphi_1(A_1, \dots, A_p)$ et $\varphi_2(A_{p+1}, \dots, A_n)$ sont indépendantes ;
- si A et B sont deux variables aléatoires indépendantes admettant une espérance, alors AB admet une espérance et $\mathbb{E}(AB) = \mathbb{E}(A)\mathbb{E}(B)$;
- pour tout couple (α, β) de réels strictement positifs, si les variables aléatoires X_α et X_β sont indépendantes, de lois respectives $\gamma(\alpha)$ et $\gamma(\beta)$, alors les variables aléatoires $\frac{X_\alpha}{X_\alpha + X_\beta}$ et $X_\alpha + X_\beta$ sont indépendantes.

8. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_{t,k} = \frac{X_t + S_{k-1}}{X_t + S_k}$.
- a) Montrer que $R_{t,1}$ et $R_{t,2}$ sont indépendantes. On admet dans la suite que les variables aléatoires $R_{t,k}$, pour $k \geq 1$, sont indépendantes.
- b) En déduire, à l'aide des questions précédentes, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $\ln(X_t)$ et $\sum_{k=1}^n \ln(R_{t,k}) + \ln(X_{t+n})$ sont de même loi.
9. a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $-\ln U$.
- b) À l'aide de la question 5.e, calculer une densité $f_{R_{t,k}}$ de la variable aléatoire $R_{t,k}$.
- c) Soit $(U_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que U . Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $R_{t,k}$ et $U_k^{1/(t+k-1)}$ sont de même loi.
- d) Déduire des questions précédentes que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\ln(X_t)$ est de même loi que la variable aléatoire

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{Y_{k+1}}{t+k} \right) + \ln \left(\frac{X_{t+n}}{t+n} \right) + d_{n,t} - \gamma.$$

10. En utilisant les résultats des questions 1.c, 2.b, 3.c et 9.d, montrer que, pour tout réel $t > 0$,

$$\mathbb{E}(\ln(X_t)) = \psi(t) = -\gamma + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{t+k} \right) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(\ln(X_t)) = \psi'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(t+k)^2}.$$

11. En utilisant la question 3.c, calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\psi(t) - \ln t)$.
12. On pose $W = U^{1/\mu}$, où μ désigne un paramètre réel strictement positif inconnu. Afin d'estimer μ , on considère, pour $p \geq 3$, un p -échantillon $(W_1, W_2, \dots, W_p)$ i.i.d. de la loi de W . On pose $G_p = -p \left(\sum_{i=1}^p \ln W_i \right)^{-1}$. Justifier que G_p est un estimateur du paramètre μ . Est-il sans biais ? Est-il convergent ?

13. On rappelle que l'appel à `random.random()` en Python renvoie un réel tiré au hasard dans l'intervalle $[0, 1[$.

a) Soit la fonction Python suivante :

```
import math
import random

def x_simulee(lam):
    return -math.log(1 - random.random()) / lam
```

Cette fonction simule une variable aléatoire réelle. Donner sa loi et justifier votre réponse.

b) Écrire une fonction Python `g(n)` simulant une variable aléatoire de loi $\gamma(n)$.

c) Soit la fonction Python suivante :

```
def m(p):
    return p / g(p)
```

On appelle la fonction `m` pour différentes valeurs de p de plus en plus grandes. Que devrait-on constater ?

3 Quelques propriétés de la fonction Γ

Thèmes abordés : suites ; séries ; intégrales généralisées ; variables à densité.

Les notations sont celles des parties précédentes.

14. *Première application : les formules de Wilks et Legendre.*

a) Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $t > 0$, établir l'égalité

$$2 \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{a_{k+1}}{t+k} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{a_{2k+1}}{\frac{t}{2} + k} \right) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{a_{2k+2}}{\frac{t+1}{2} + k} \right) + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right).$$

b) Exprimer $w_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right)$ en fonction de deux termes de la suite $(h_n)_{n \geq 1}$.
En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ln 2$.

c) Pour $t > 0$, soient X_t et $X_{t+\frac{1}{2}}$ deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\gamma(t)$ et $\gamma\left(t + \frac{1}{2}\right)$. En utilisant les questions 4 et 9.d, montrer que la variable aléatoire $2 \ln(X_t)$ est de même loi que la variable aléatoire $\ln\left(X_{\frac{t}{2}}\right) + \ln\left(X_{\frac{t+1}{2}}\right) + 2 \ln 2$.

d) Posons $t = 2s$. Déduire de la question précédente que, pour tout réel $r > 0$, $(X_{2s})^{2r}$ et $2^{2r}(X_s)^r \left(X_{s+\frac{1}{2}}\right)^r$ sont de même loi.

e) En choisissant une valeur particulière de s , établir, pour tout $r > 0$, la formule

$$2^{2r-1} \Gamma(r) \Gamma\left(r + \frac{1}{2}\right) = \Gamma(2r) \sqrt{\pi}.$$

15. *Deuxième application : la formule de Stirling.*

- a) Déterminer quatre réels
- a, b, c, d
- tels que, pour tout réel
- $u > 0$
- ,

$$\frac{1}{u^2(u+1)^2} = \frac{a}{u^2} + \frac{b}{(u+1)^2} + \frac{c}{u} + \frac{d}{u+1}.$$

En déduire, pour tout $t > 0$, la relation

$$\psi'(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(t+k)^2(t+k+1)^2}.$$

On admet sans démonstration que, pour tout $u > 0$,

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{(u + \frac{1}{14})^3} - \frac{1}{(u + 1 + \frac{1}{14})^3} \right) \leq \frac{1}{u^2(u+1)^2} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{(u+1)^3} \right).$$

- b) Déduire des deux résultats précédents, pour tout
- $t > 0$
- , les deux encadrements

$$\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{6(t + \frac{1}{14})^3} \leq \psi'(t) - \frac{1}{t} \leq \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{6t^3}$$

et

$$\ln t - \frac{1}{2t} - \frac{1}{12t^2} \leq \psi(t) \leq \ln t - \frac{1}{2t} - \frac{1}{12(t + \frac{1}{14})^2}.$$

En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(\ln(X_t))$ et de $\mathbb{V}(\ln(X_t))$ respectivement, lorsque t tend vers $+\infty$.

- c) Calculer, pour tout
- y
- vérifiant
- $y > t > 0$
- , l'intégrale
- $\int_t^y \left(\psi(x) - \ln x + \frac{1}{2x} \right) dx$
- . Montrer, pour
- t
- fixé, l'existence de
- $\lim_{y \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\Gamma(y)}{y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y}} \right)$
- ; on note
- θ
- cette limite.

- d) En utilisant la question 14.e et l'identité
- $x^x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^x \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{-x}$
- , valable pour
- $x > 0$
- , calculer
- e^θ
- . En déduire que
- $\Gamma(x)$
- est équivalente à
- $\sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}$
- lorsque
- x
- tend vers
- $+\infty$
- .