

ECRICOME

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2011

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Exercice 1

Exercice 1 – Polynômes et produit scalaire

$E = \mathbb{R}_n[X]$, $P_0 = 1$ et $P_k = \frac{X(X-k)^{k-1}}{k!}$ pour $1 \leq k \leq n$; $u(P) = P'(X+1)$;
 $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k)Q^{(k)}(k)$.

Corrigé – Exercice 1.

1. La base $(P_0, \dots, P_n)$.

- a) $P_0 = 1$ est de degré 0 et, pour $k \geq 1$, P_k est le produit de X (degré 1) par $(X-k)^{k-1}$ (degré $k-1$), divisé par $k!$: P_k est de degré k , de coefficient dominant $\frac{1}{k!} \neq 0$. Supposons $\sum_{k=0}^n \lambda_k P_k = 0$ avec des λ_k non tous nuls, et soit m le plus grand indice tel que $\lambda_m \neq 0$. Alors $\sum_{k=0}^m \lambda_k P_k$ est de degré m (coefficient de X^m égal à $\frac{\lambda_m}{m!} \neq 0$), donc non nul : contradiction. La famille, échelonnée en degrés, est libre ; elle compte $n+1 = \dim E$ vecteurs de E .

$(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E .

- b) Pour $k=1$: $P_1 = X$, donc $P'_1(X+1) = 1 = P_0(X)$. Pour $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} P'_k &= \frac{(X-k)^{k-1} + (k-1)X(X-k)^{k-2}}{k!} = \frac{(X-k)^{k-2}((X-k) + (k-1)X)}{k!} \\ &= \frac{(X-k)^{k-2}(X-1)}{(k-1)!}, \end{aligned}$$

car $(X-k) + (k-1)X = k(X-1)$. Ainsi $P'_k(X+1) = \frac{X(X-(k-1))^{(k-1)-1}}{(k-1)!} = P_{k-1}(X)$.

$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad P'_k(X+1) = P_{k-1}(X)$.

En remplaçant X par $X-1$, on obtient $P'_k(X) = P_{k-1}(X-1)$ pour $1 \leq k \leq n$. Fixons k et montrons par récurrence sur $j \in \{1, \dots, k\}$ que $P_k^{(j)}(X) = P_{k-j}(X-j)$. C'est vrai pour $j=1$. Si c'est vrai pour un $j < k$, alors, en dérivant (la dérivée de $Q(X-j)$ est $Q'(X-j)$) et en utilisant la relation précédente pour l'indice $k-j \geq 1$:

$$P_k^{(j+1)}(X) = P'_{k-j}(X-j) = P_{k-j-1}((X-j)-1) = P_{k-(j+1)}(X-(j+1)).$$

$\forall 1 \leq j \leq k \leq n, \quad P_k^{(j)}(X) = P_{k-j}(X-j)$.

- c) Comme $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de E , tout $P \in E$ s'écrit (de manière unique) $P = \sum_{k=0}^n a_k P_k$.

Montrons que $P_k^{(j)}(j) = \delta_{k,j}$ (symbole de Kronecker) pour $j, k \in \{0, \dots, n\}$.

- Si $k < j$: $\deg P_k = k < j$, donc $P_k^{(j)} = 0$.
- Si $j = 0 \leq k$: $P_0(0) = 1$, et $P_k(0) = 0$ pour $k \geq 1$ (facteur X).
- Si $1 \leq j \leq k$: par b), $P_k^{(j)}(j) = P_{k-j}(0)$, qui vaut 1 si $k = j$ et 0 si $k > j$.

Par linéarité de la dérivation et de l'évaluation, $P^{(j)}(j) = \sum_{k=0}^n a_k P_k^{(j)}(j) = a_j$.

$$\forall j \in \{0, \dots, n\}, \quad P^{(j)}(j) = a_j, \quad \text{d'où} \quad \forall P \in E, \quad P = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k) P_k.$$

2. L'endomorphisme u .

- a) Si $P \in E$, P' est de degré au plus $n-1$, donc $P'(X+1) \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \subset E$. Pour $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda P + Q)'(X+1) = \lambda P'(X+1) + Q'(X+1)$.

u est un endomorphisme de E .

- b) On a $u(P_0) = 0$ et, par 1b), $u(P_k) = P_{k-1}$ pour $1 \leq k \leq n$. La matrice $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ a donc des 1 juste au-dessus de la diagonale et des 0 ailleurs :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- c) $\text{Im } u = \text{Vect}(u(P_0), \dots, u(P_n)) = \text{Vect}(P_0, \dots, P_{n-1})$, de dimension n (sous-famille d'une base).

$$\text{rg}(A) = n.$$

Pour $j \leq k$, $u^j(P_k) = P_{k-j}$, donc $u^{k+1}(P_k) = u(P_0) = 0$; ainsi u^{n+1} s'annule sur la base, $u^{n+1} = 0$ et X^{n+1} est un polynôme annulateur de A : $\text{Sp}(A) \subset \{0\}$. Par le théorème du rang, $\dim \text{Ker } A = (n+1) - n = 1$, donc 0 est valeur propre (de sous-espace propre $\text{Ker } u = \text{Vect}(P_0)$).

$$\text{Sp}(A) = \{0\}.$$

- d) Si A était diagonalisable, comme sa seule valeur propre est 0, elle serait semblable à la matrice nulle, donc nulle. Or $A \neq 0$ car $n \geq 1$. (De façon équivalente : $\dim \text{Ker } A = 1 < n+1$.)

A n'est pas diagonalisable.

3. Produit scalaire.

- a) L'application est à valeurs réelles et symétrique. Pour Q fixé, $P \mapsto P^{(k)}(k)$ est linéaire, donc $P \mapsto \langle P, Q \rangle$ est linéaire ; par symétrie, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire. On a

$\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^n (P^{(k)}(k))^2 \geq 0$. Si $\langle P, P \rangle = 0$, une somme de carrés étant nulle, $P^{(k)}(k) = 0$ pour tout k , et par 1c), $P = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k)P_k = 0$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

b) Par 1c), $P_i^{(k)}(k) = \delta_{i,k}$, donc $\langle P_i, P_j \rangle = \sum_{k=0}^n \delta_{i,k} \delta_{j,k} = \delta_{i,j}$. La famille est orthonormale, et c'est une base par 1a).

$(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base orthonormale de E .

Exercice 2

Exercice 2 – Une fonction de deux variables sans extremum

$\varphi(t) = \frac{e^t - 1}{t} - t(e^{1/t} - 1)$, $\psi(t) = t - \frac{1}{t} - \ln t$, $f(x, y) = x^y - y^x$ sur $U =]0, +\infty[^2$.

Corrigé – Exercice 2.

1. Étude de ψ .

ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\psi'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} = \frac{t^2 - t + 1}{t^2} = \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{t^2} > 0.$$

Donc ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. En 0^+ , $\psi(t) = -\frac{1+t \ln t}{t} + t \rightarrow -\infty$ car $t \ln t \rightarrow 0$ (croissances comparées) ; en $+\infty$, $\psi(t) \rightarrow +\infty$ car $t - \ln t \rightarrow +\infty$ (croissances comparées). Enfin $\psi(1) = 1 - 1 - 0 = 0$.

ψ strictement croissante, $\psi(1) = 0$, $\psi < 0$ sur $]0, 1[$, $\psi > 0$ sur $]1, +\infty[$.

2. La série $\sum \frac{n-1}{n!}$.

Pour $n \geq 1$, $\frac{n-1}{n!} = \frac{n}{n!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$. Les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!}$ convergent (série exponentielle), de sommes e et $e - 1$. Par linéarité :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n-1}{n!} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} = e - (e - 1) = 1.$$

3. La somme $\sum \frac{\psi(t^{n-1})}{n!}$.

Soit $t > 0$. On a $\psi(t^{n-1}) = t^{n-1} - t^{1-n} - (n-1) \ln t$. Par la série exponentielle,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n!} = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = \frac{e^t - 1}{t}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{1-n}}{n!} = t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1/t)^n}{n!} = t(e^{1/t} - 1),$$

et, par 2, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1) \ln t}{n!} = \ln t$. Ces trois séries convergent, donc par linéarité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} = \varphi(t) - \ln(t).$$

4. Comparaison de φ et $\ln$.

Soit $t \in]0, 1[$. Pour $n \geq 2$, $t^{n-1} \in]0, 1[$, donc $\psi(t^{n-1}) < 0$ par 1 ; pour $n = 1$, $\psi(t^0) = \psi(1) = 0$. Tous les termes de la série sont négatifs et celui d'indice 2 est strictement négatif, d'où

$$\varphi(t) - \ln t = \frac{\psi(t)}{2} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} \leq \frac{\psi(t)}{2} < 0.$$

De même, pour $t > 1$, $t^{n-1} > 1$ pour $n \geq 2$, tous les termes sont positifs et $\varphi(t) - \ln t \geq \frac{\psi(t)}{2} > 0$.

$$\boxed{\forall t \in]0, 1[, \varphi(t) < \ln(t) \quad \text{et} \quad \forall t \in]1, +\infty[, \varphi(t) > \ln(t).}$$

5. Points critiques.

Comme $f(x, y) = \exp(y \ln x) - \exp(x \ln y)$, on a, pour $(x, y) \in U$:

$$\partial_1 f(x, y) = \frac{y}{x} x^y - \ln(y) y^x = y x^{y-1} - \ln(y) y^x,$$

$$\partial_2 f(x, y) = \ln(x) x^y - \frac{x}{y} y^x = \ln(x) x^y - x y^{x-1}.$$

- Si (x, y) est critique : $\partial_1 f(x, y) = 0$ donne $\ln y = \frac{y x^{y-1}}{y^x} > 0$, donc $y > 1$; $\partial_2 f(x, y) = 0$ donne $\ln x = \frac{x y^{x-1}}{x^y} > 0$, donc $x > 1$. En multipliant,

$$\ln(x) \ln(y) = \frac{x y^{x-1} \cdot y x^{y-1}}{x^y y^x} = \frac{y^x x^y}{x^y y^x} = 1.$$

Enfin, $\partial_2 f(x, y) = 0$ divisé par $x > 0$ donne $y^{x-1} = x^{y-1} \ln(x)$.

- Réciproquement, si les quatre conditions sont vérifiées : en multipliant la dernière par x , $x y^{x-1} = \ln(x) x^y$, soit $\partial_2 f(x, y) = 0$. Comme $\ln x \neq 0$, $\ln y = \frac{1}{\ln x}$ et

$$\partial_1 f(x, y) = y x^{y-1} - \frac{y \cdot y^{x-1}}{\ln x} = \frac{y}{\ln x} (x^{y-1} \ln x - y^{x-1}) = 0.$$

$$\boxed{(x, y) \text{ critique} \iff x > 1, y > 1, \ln(x) \ln(y) = 1, y^{x-1} = x^{y-1} \ln(x).}$$

6. Paramétrage d'un point critique.

Par 5, $x > 1$; on pose $t = \ln x > 0$, de sorte que $x = e^t$. Alors $\ln y = \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{t}$, donc $y = e^{1/t}$. La dernière relation porte sur des réels strictement positifs ; en passant au logarithme :

$$(x - 1) \ln y = (y - 1) \ln x + \ln(\ln x) \iff \frac{e^t - 1}{t} = t(e^{1/t} - 1) + \ln t \iff \varphi(t) = \ln t.$$

$$\boxed{\exists t \in \mathbb{R}_+^*, \quad x = \exp(t), \quad y = \exp\left(\frac{1}{t}\right), \quad \varphi(t) = \ln(t).}$$

7. Unicité du point critique.

Si (x, y) est critique, le réel t de 6 vérifie $\varphi(t) = \ln t$, ce qui, par 4, exclut $t \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$: $t = 1$, puis $x = y = e$. Réciproquement, (e, e) vérifie les conditions de 5 : $e > 1$, $\ln(e) \ln(e) = 1$ et $e^{e-1} = e^{e-1} \ln(e)$.

$$\boxed{(e, e) \text{ est l'unique point critique de } f.}$$

8. Absence d'extremum.

Soit $g : s \mapsto \frac{s}{e} - \ln s$ sur $\mathbb{R}_+^*$: $g'(s) = \frac{1}{e} - \frac{1}{s}$ est strictement négative sur $]0, e[$ et strictement positive sur $]e, +\infty[$, donc g admet en e un minimum strict, $g(e) = 0$. Ainsi $e \ln s < s$ pour tout $s > 0$, $s \neq e$. Pour $t \in]-e, 0[\cup]0, +\infty[$, par stricte croissance de $\exp$:

$$\begin{aligned} f(e, e+t) &= \exp(e+t) - \exp(e \ln(e+t)) > 0, \\ f(e+t, e) &= \exp(e \ln(e+t)) - \exp(e+t) = -f(e, e+t) < 0. \end{aligned}$$

Comme $f(e, e) = 0$, toute boule ouverte de centre (e, e) contient des points où $f > f(e, e)$ et des points où $f < f(e, e)$: f n'a pas d'extremum local en (e, e) . Or U est un ouvert et f est de classe $\mathcal{C}^1$: un extremum (local ou global) de f sur U est nécessairement atteint en un point critique, et le seul point critique (e, e) n'en est pas un.

f n'admet aucun extremum sur U .

Problème**Problème, partie I – Étude des variables Y_n et Z_n**

$(X_i)_{i \geq 1}$ indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$, $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$, $Z_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{i}$, $f_n(t) = ne^{-t}(1 - e^{-t})^{n-1}$ pour $t \geq 0$, 0 sinon.

Corrigé – Problème, partie I.**1. Calcul de maxima en Python.**

- a) On initialise m_2 à $X[0]$, on le remplace par $X[1]$ si celui-ci est plus grand ; on compare ensuite ce maximum à $X[2]$.

```
def max2et3(X):
    m2 = X[0]
    if X[1] > m2:
        m2 = X[1]
    m3 = m2
    if X[2] > m3:
        m3 = X[2]
    return m2, m3
```

- b) On parcourt la liste en conservant dans m le plus grand élément rencontré.

```
def maximum(X):
    m = X[0]
    for i in range(1, len(X)):
        if X[i] > m:
            m = X[i]
    return m
```

2. Loi de Y_n .

- a) Pour $t \in \mathbb{R}$, $[Y_n \leq t] = \bigcap_{i=1}^n [X_i \leq t]$, et les X_i sont mutuellement indépendantes.

$$F_{Y_n}(t) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(t).$$

- b) Chaque X_i suit la loi $\mathcal{E}(1)$.

$$F_{Y_n}(t) = 0 \text{ si } t < 0, \quad F_{Y_n}(t) = (1 - \exp(-t))^n \text{ si } t \geq 0.$$

- c) F_{Y_n} est continue sur $] -\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$, et en 0 : $(1 - e^0)^n = 0$; elle est donc continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ainsi Y_n est une variable à densité. En dérivant là où c'est possible : $F'_{Y_n}(t) = 0$ pour $t < 0$ et $F'_{Y_n}(t) = ne^{-t}(1 - e^{-t})^{n-1} = f_n(t)$ pour $t > 0$. Une densité pouvant être modifiée en un point, on peut prendre la valeur $f_n(0)$ en 0.

$$f_n \text{ est une densité de } Y_n.$$

3. La variable $\frac{X_{n+1}}{n+1}$.

- a) Pour $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}\left(\frac{X_{n+1}}{n+1} \leq t\right) = \mathbb{P}(X_{n+1} \leq (n+1)t) = F_{X_{n+1}}((n+1)t)$.

$$F_{X_{n+1}/(n+1)}(t) = 0 \text{ si } t < 0, \quad F_{X_{n+1}/(n+1)}(t) = 1 - \exp(-(n+1)t) \text{ si } t \geq 0.$$

Ainsi $\frac{X_{n+1}}{n+1}$ suit la loi exponentielle de paramètre $n+1$.

- b) Cette fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$ (elle vaut 0 en 0) et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: $\frac{X_{n+1}}{n+1}$ est à densité, et on obtient une densité en dérivant sauf en 0.

$$d_{n+1}(t) = 0 \text{ si } t < 0, \quad d_{n+1}(t) = (n+1) \exp(-(n+1)t) \text{ si } t \geq 0.$$

4. Une intégrale.

Pour $t \in \mathbb{R}$, $e^{nt}(1 - e^{-t})^{n-1} = e^t(e^t(1 - e^{-t}))^{n-1} = e^t(e^t - 1)^{n-1}$. Une primitive de $t \mapsto ne^t(e^t - 1)^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$ est $t \mapsto (e^t - 1)^n$, donc, pour tout réel x ,

$$\int_0^x n \exp(nt)(1 - \exp(-t))^{n-1} dt = \left[(e^t - 1)^n\right]_0^x = (e^x - 1)^n - 0.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x n \exp(nt)(1 - \exp(-t))^{n-1} dt = (\exp(x) - 1)^n.$$

5. Loi de Z_n .

Pour $n \geq 1$, on note $\mathcal{H}(n)$: « Z_n est une variable à densité, de densité f_n ».

- *Initialisation.* $Z_1 = X_1$ suit la loi $\mathcal{E}(1)$, de densité $t \mapsto e^{-t}$ sur $[0, +\infty[$ et 0 sur $] -\infty, 0[$, c'est-à-dire f_1 .
- *Hérédité.* Supposons $\mathcal{H}(n)$. On a $Z_{n+1} = Z_n + \frac{X_{n+1}}{n+1}$. La variable Z_n est fonction de $(X_1, \dots, X_n)$, donc, par le lemme des coalitions, Z_n et $\frac{X_{n+1}}{n+1}$ sont indépendantes ;

elles ont pour densités f_n et d_{n+1} , cette dernière étant bornée (par $n+1$). Par le théorème de convolution, Z_{n+1} admet pour densité

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) d_{n+1}(x-t) dt,$$

pourvu que h soit continue sauf en un nombre fini de points. L'intégrande est nul sauf si $t \geq 0$ et $x-t \geq 0$.

Si $x < 0$, $h(x) = 0$. Si $x \geq 0$, par 4 :

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^x n e^{-t} (1 - e^{-t})^{n-1} (n+1) e^{-(n+1)(x-t)} dt \\ &= (n+1) e^{-(n+1)x} \int_0^x n e^{nt} (1 - e^{-t})^{n-1} dt = (n+1) e^{-(n+1)x} (e^x - 1)^n, \end{aligned}$$

soit $h(x) = (n+1) e^{-x} (e^{-x} (e^x - 1))^n = (n+1) e^{-x} (1 - e^{-x})^n = f_{n+1}(x)$. La fonction $h = f_{n+1}$ est continue sauf éventuellement en 0, d'où $\mathcal{H}(n+1)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Z_n \text{ est à densité, de densité } f_n.}$$

En particulier, par 2c), Y_n et Z_n ont la même loi.

Problème, partie II – Existence et unicité d'une équation différentielle

E : fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ telles que $\int_0^{+\infty} |f|$ converge ; $(D_f) : y - y' = f$; $k_f(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$.

Corrigé – Problème, partie II.

1. Unicité.

a) h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de fonctions dérivables, et

$$h'(x) = (y'(x) - w'(x))e^{-x} - (y(x) - w(x))e^{-x}.$$

Par (D_f) , $y' = y - f$ et $w' = w - f$, donc $y' - w' = y - w$ et $h' = 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

$$\boxed{h \text{ est constante sur } \mathbb{R}_+}.$$

b) Notons C cette constante : $y(x) - w(x) = C e^x$ pour $x \geq 0$. Comme E est un espace vectoriel, $y - w \in E$, donc $\int_0^{+\infty} |C| e^x dx$ converge. Si $C \neq 0$, $\int_0^A |C| e^x dx = |C|(e^A - 1) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} +\infty$: c'est absurde. Donc $C = 0$.

$$\boxed{y = w : (D_f) \text{ admet au plus une solution dans } E.}$$

2. Convergence.

Soit $x \geq 0$. La fonction $t \mapsto e^{-t} f(t)$ est continue sur $[x, +\infty[$ et, pour $t \geq x \geq 0$, $0 \leq |e^{-t} f(t)| \leq |f(t)|$. Comme $\int_x^{+\infty} |f(t)| dt$ converge (car $\int_0^{+\infty} |f|$ converge et f est continue sur $[0, x]$), le critère de comparaison pour les fonctions positives montre que $\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ converge absolument.

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad \int_x^{+\infty} \exp(-t) f(t) dt \text{ converge.}}$$

3. k_f est solution.

Posons $I = \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ (convergente par 2) et $G(x) = \int_0^x e^{-t} f(t) dt$. Par la relation de Chasles, $k_f(x) = e^x(I - G(x))$. Comme $t \mapsto e^{-t} f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, G est la primitive qui s'annule en 0 : elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $G'(x) = e^{-x} f(x)$. Donc k_f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$k'_f(x) = e^x(I - G(x)) - e^x e^{-x} f(x) = k_f(x) - f(x).$$

$$k_f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+, k_f(x) - k'_f(x) = f(x).$$

4. Cas où f est positive.

- a) (α) Par linéarité de l'intégrale convergente, $k_f(x) = \int_x^{+\infty} e^{x-t} f(t) dt$. Pour $t \geq x$, $0 \leq e^{x-t} f(t) \leq f(t)$, et les intégrales sur $[x, +\infty[$ convergent ; par croissance de l'intégrale :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq k_f(x) \leq \int_x^{+\infty} f(t) dt.$$

- (β) Par 3, $k_f = k'_f + f$, et $k'_f = k_f - f$ est continue sur $[0, A]$. Ainsi $\int_0^A k'_f(x) dx = k_f(A) - k_f(0)$ et :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^A k_f(x) dx = k_f(A) - k_f(0) + \int_0^A f(x) dx.$$

- b) Comme $\int_0^{+\infty} f$ converge, $\int_A^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} f - \int_0^A f \rightarrow 0$ quand $A \rightarrow +\infty$. Par (α) et le théorème d'encadrement, $k_f(A) \rightarrow 0$. Par (β), $\int_0^A k_f(x) dx$ admet une limite finie quand $A \rightarrow +\infty$, égale à $\int_0^{+\infty} f - k_f(0)$, avec $k_f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx$. Par linéarité des intégrales convergentes :

$$\int_0^{+\infty} k_f(x) dx \text{ converge et } \int_0^{+\infty} k_f(x) dx = \int_0^{+\infty} (1 - \exp(-x)) f(x) dx.$$

5. Cas général.

La fonction $|f|$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, et $\int_0^{+\infty} |f|$ converge : $|f| \in E$. Pour $x \geq 0$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ étant absolument convergente, l'inégalité triangulaire donne

$$|k_f(x)| = e^x \left| \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \right| \leq e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} |f(t)| dt = k_{|f|}(x).$$

Par 4b) appliqué à $|f|$, $\int_0^{+\infty} k_{|f|}$ converge. Comme $|k_f|$ est continue et $0 \leq |k_f| \leq k_{|f|}$, le critère de comparaison conclut.

$$\int_0^{+\infty} |k_f(x)| dx \text{ converge, donc } k_f \in E.$$

6. Application aux densités.

Supposons qu'une telle densité g existe. La restriction de f à $\mathbb{R}_+$ est continue, positive, et $\int_0^{+\infty} |f| = \int_{-\infty}^{+\infty} f = 1$ (f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$) : elle appartient à E . De même, g est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}_+$, positive, et $\int_0^{+\infty} |g| = \int_{-\infty}^{+\infty} g = 1$: sa restriction à $\mathbb{R}_+$

appartient à E et vérifie (D_f) . Par 3 et 5, $k_f \in E$ vérifie aussi (D_f) ; par 1b), $g = k_f$ sur $\mathbb{R}_+$. Par 4b) :

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{+\infty} g(x) dx = \int_0^{+\infty} k_f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx - \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \\ &= 1 - \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx. \end{aligned}$$

Ainsi $\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx = 0$. Or $x \mapsto e^{-x} f(x)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$: si elle était strictement positive en un point x_0 , elle serait minorée par un réel $c > 0$ sur un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$ non réduit à un point, et l'intégrale serait au moins $c(b-a) > 0$. Donc $f = 0$ sur $\mathbb{R}_+$, puis sur $\mathbb{R}$, ce qui contredit $\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1$.

Il n'existe aucune densité g dérivable sur $\mathbb{R}_+$, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, telle que $g - g' = f$ sur $\mathbb{R}_+$.

Problème, partie III – Étude de l'application $f \mapsto k_f$

$\varphi : E \rightarrow E$, $\varphi(f) = k_f$.

Corrigé – Problème, partie III.

1. φ est un endomorphisme.

Pour $f \in E$, k_f est dérivable, donc continue, sur $\mathbb{R}_+$ (partie II, 3) et $\int_0^{+\infty} |k_f|$ converge (partie II, 5) : $k_f \in E$. Pour $f, g \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, par linéarité des intégrales convergentes, $k_{\alpha f + g}(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} (\alpha f(t) + g(t)) dt = \alpha k_f(x) + k_g(x)$.

φ est un endomorphisme de E .

2. Les fonctions f_a .

f_a est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, et $\int_0^A e^{-ax} dx = \frac{1-e^{-aA}}{a} \rightarrow \frac{1}{a} : f_a \in E$. Pour $x \geq 0$ et $A \geq x$,

$$\int_x^A e^{-t} e^{-at} dt = \frac{e^{-(1+a)x} - e^{-(1+a)A}}{1+a} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{e^{-(1+a)x}}{1+a},$$

donc $k_{f_a}(x) = e^x \frac{e^{-(1+a)x}}{1+a} = \frac{f_a(x)}{1+a}$. Comme f_a n'est pas identiquement nulle :

$$f_a \in E, \quad \varphi(f_a) = \frac{1}{1+a} f_a : f_a \text{ est vecteur propre de valeur propre } \frac{1}{1+a}.$$

3. Valeurs propres.

a) Si $\lambda = 0$, alors $k_f = 0$, donc $k'_f = 0$ et $f = k_f - k'_f = 0$, ce qui contredit le fait que f n'est pas identiquement nulle.

$\lambda \neq 0$.

b) Comme $\lambda \neq 0$, $f = \frac{1}{\lambda} k_f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (partie II, 3). En reportant $k_f = \lambda f$ dans $k_f - k'_f = f : \lambda f - \lambda f' = f$, soit, en divisant par λ :

f est dérivable et $f' = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) f$.

- c) Posons $\mu = 1 - \frac{1}{\lambda}$ et $v(x) = f(x)e^{-\mu x}$ sur $\mathbb{R}_+$. Alors $v'(x) = (f'(x) - \mu f(x))e^{-\mu x} = 0$: v est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, égale à $C = f(0)$.

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) = C \exp\left(\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)x\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

- d) Comme f n'est pas identiquement nulle, $C \neq 0$. Si $\mu \geq 0$, $|f(x)| \geq |C|$ pour tout $x \geq 0$, et $\int_0^A |f| \geq |C|A \rightarrow +\infty$: contradiction avec $f \in E$. Donc $\mu < 0$, c'est-à-dire $\frac{1}{\lambda} > 1$. Si $\lambda < 0$, $\frac{1}{\lambda} < 0$: impossible ; donc $\lambda > 0$, et $\frac{1}{\lambda} > 1$ équivaut à $\lambda < 1$.

$$\lambda \in]0, 1[.$$

4. Spectre et sous-espaces propres.

Par 3d), $\text{Sp}(\varphi) \subset]0, 1[$. Réciproquement, soit $\lambda \in]0, 1[$ et $a = \frac{1}{\lambda} - 1 > 0$: par 2, $\varphi(f_a) = \frac{1}{1+a}f_a = \lambda f_a$ avec $f_a \neq 0$, donc $\lambda \in \text{Sp}(\varphi)$.

$$\text{Sp}(\varphi) =]0, 1[.$$

Pour $\lambda \in]0, 1[$, par 3c), tout vecteur propre associé à λ est de la forme $x \mapsto C e^{(1-\frac{1}{\lambda})x} = C f_a(x)$ avec $a = \frac{1}{\lambda} - 1$; inversement, $f_a \in E_\lambda(\varphi)$. Donc $E_\lambda(\varphi) = \text{Vect}(f_a)$, et $f_a \neq 0$.

$$E_\lambda(\varphi) = \text{Vect}\left(x \mapsto \exp\left(-\frac{1-\lambda}{\lambda}x\right)\right), \text{ de base } \left(x \mapsto \exp\left(-\frac{1-\lambda}{\lambda}x\right)\right).$$