

Ecricome

Mathématiques

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2011

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1 Exercice 1 – Polynômes et produit scalaire	2
<i>Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; applications linéaires ; réduction ; algèbre bilinéaire.</i>	2
2 Exercice 2 – Étude d'une fonction de deux variables	2
<i>Thèmes abordés : Fonctions de plusieurs variables ; séries ; fonctions d'une variable.</i>	2
3 Problème – Maximum, équation différentielle et spectre	3
<i>Thèmes abordés : Variables à densité ; intégrales généralisées ; espaces vectoriels ; applications linéaires ; Python.</i>	3

1 Exercice 1 – Polynômes et produit scalaire

Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; applications linéaires ; réduction ; algèbre bilinéaire.

Soit n un entier naturel non nul et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Pour tout entier naturel j , on note $P^{(j)}$ la dérivée j -ième de P .

On définit la famille de polynômes $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ par

$$P_0(X) = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad P_k(X) = \frac{X(X-k)^{k-1}}{k!}.$$

1. a) Prouver que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de E .
 b) Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $P'_k(X+1) = P_{k-1}(X)$, puis, pour tous les entiers k, j vérifiant $1 \leq j \leq k \leq n$, donner une relation entre $P_k^{(j)}(X)$ et $P_{k-j}(X-j)$.
 c) Soit $P \in E$. Justifier l'existence d'un $(n+1)$ -uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^n a_k P_k$, puis établir que $\forall j \in \{0, \dots, n\}$, $P^{(j)}(j) = a_j$. Établir ainsi $\forall P \in E$, $P = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k) P_k$.
 2. On considère l'application u définie sur E par $\forall P \in E$, $u(P)(X) = P'(X+1)$.
 a) Établir que u est un endomorphisme de E .
 b) Écrire la matrice A de u dans la base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de E .
 c) Déterminer le rang de A ainsi que ses valeurs propres.
 d) La matrice A est-elle diagonalisable ? Une réponse argumentée est attendue.
 3. On définit sur $E \times E$ l'application $(\cdot, \cdot)$ par

$$\forall (P, Q) \in E \times E, \quad (P, Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(k) Q^{(k)}(k).$$

- a) Démontrer que $(\cdot, \cdot)$ définit un produit scalaire sur E .
 b) Justifier que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base orthonormale de E .

2 Exercice 2 – Étude d'une fonction de deux variables

Thèmes abordés : Fonctions de plusieurs variables ; séries ; fonctions d'une variable.

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(t) = \frac{\exp(t) - 1}{t} - t \left(\exp\left(\frac{1}{t}\right) - 1 \right),$$

ainsi que la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\psi(t) = t - \frac{1}{t} - \ln(t)$. On note $U =]0, +\infty[^2$ et l'on définit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = x^y - y^x = \exp(y \ln x) - \exp(x \ln y).$$

On admet que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U . L'objectif est de montrer que f n'admet aucun extremum sur U .

1. Étudier les variations de ψ sur $\mathbb{R}_+^*$, calculer $\psi(1)$ et préciser le signe de ψ .

2. Prouver la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n-1}{n!}$ et calculer sa somme.
3. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Exprimer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!}$ en fonction de $\varphi(t)$ et de $\ln(t)$. On admettra la convergence de cette série.
4. Justifier que $\varphi(t) < \ln(t)$ pour tout $t \in]0, 1[$, et que $\varphi(t) > \ln(t)$ pour tout $t \in]1, +\infty[$.
5. Soit $(x, y) \in U$. Montrer que (x, y) est un point critique de f si et seulement si

$$x > 1, \quad y > 1, \quad \ln(x) \ln(y) = 1, \quad y^{x-1} = x^{y-1} \ln(x).$$

6. Soit $(x, y) \in U$ un point critique de f . Justifier l'existence d'un réel $t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$x = \exp(t), \quad y = \exp\left(\frac{1}{t}\right), \quad \varphi(t) = \ln(t).$$

7. Prouver que (e, e) est l'unique point critique de f .
8. En comparant les signes des fonctions $t \mapsto f(e, e+t)$ et $t \mapsto f(e+t, e)$, justifier que f n'admet aucun extremum sur U .

3 Problème – Maximum, équation différentielle et spectre

Thèmes abordés : Variables à densité ; intégrales généralisées ; espaces vectoriels ; applications linéaires ; Python.

Les trois parties sont indépendantes. La première compare les variables $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i/i$, où (X_i) est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1. La deuxième étudie une équation différentielle liée aux densités, et la troisième l'application linéaire associée.

Partie I – Étude des variables Y_n et Z_n

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé. Pour une variable aléatoire X , sa fonction de répartition est notée $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$. Une variable suit la loi exponentielle de paramètre $a > 0$ lorsque sa fonction de répartition vaut 0 sur $] -\infty, 0[$ et $1 - \exp(-at)$ sur $[0, +\infty[$.

On considère une suite $(X_i)_{i \geq 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 1. Pour $n \geq 1$, on pose

$$Y_n = \max(X_1, \dots, X_n), \quad Z_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{i},$$

et l'on définit f_n par $f_n(t) = 0$ si $t < 0$, et $f_n(t) = n \exp(-t)(1 - \exp(-t))^{n-1}$ si $t \geq 0$.

1. On considère une liste **X** de 2011 réels, préalablement remplie.
 - a) Écrire une fonction Python calculant et affichant les deux réels suivants :

$$\max(\mathbf{X}[0], \mathbf{X}[1]) \quad \text{et} \quad \max(\mathbf{X}[0], \mathbf{X}[1], \mathbf{X}[2]).$$

- b) Écrire une fonction Python calculant et affichant le réel $\max(\mathbf{X})$.
2. a) Pour tout réel t , exprimer $F_{Y_n}(t)$ à l'aide des $F_{X_i}(t)$.

- b) En déduire l'expression de $F_{Y_n}(t)$ en fonction de n et t , en distinguant $t < 0$ et $t \geq 0$.
- c) Vérifier que f_n est une densité de Y_n .
- 3. a) Préciser la fonction de répartition de $X_{n+1}/(n+1)$.
- b) Démontrer que Z_n est une variable aléatoire à densité et proposer une densité d_{n+1} .
- 4. Pour tout réel x , vérifier que

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) \exp(nt)(1 - \exp(-t))^{x-1} dt = (\exp(x) - 1)^n.$$

- 5. Montrer par récurrence que, pour tout entier $m \geq 1$, Z_m est une variable aléatoire à densité dont f_m est une densité. Pour l'hérédité, on remarquera que $Z_{n+1} = Z_n + X_{n+1}/(n+1)$.

Partie II – Existence et unicité d'une équation différentielle

On désigne par E l'ensemble des fonctions f continues de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ converge. On admet que E est un espace vectoriel réel. Pour $f \in E$, on considère l'équation différentielle $(D_f) : y - y' = f$, où l'inconnue $y : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable. Pour $x > 0$, on note

$$k_f(x) = \exp(x) \int_x^{+\infty} \exp(-t)f(t) dt.$$

- 1. Soient $y, w \in E$, dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifiant (D_f) . On introduit $h(x) = (y(x) - w(x)) \exp(-x)$.
 - a) Prouver que h est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.
 - b) En utilisant le fait que $y - w \in E$, montrer que cette constante est nulle. Conclure à l'unicité éventuelle d'une solution de (D_f) dans E .
- 2. Pour $x > 0$, justifier la convergence de $\int_x^{+\infty} \exp(-t)f(t) dt$.
- 3. Établir que $x \mapsto k_f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie (D_f) .
- 4. On suppose dans cette question que f est positive.
 - a) Vérifier les relations

$$0 \leq k_f(x) \leq \int_x^{+\infty} f(t) dt, \quad \int_0^A k_f(x) dx = k_f(A) - k_f(0) + \int_0^A f(x) dx.$$

- b) Prouver la convergence de $\int_0^{+\infty} k_f(x) dx$ et établir

$$\int_0^{+\infty} k_f(x) dx = \int_0^{+\infty} (1 - \exp(-x))f(x) dx.$$

- 5. Revenir au cas général et montrer que $\int_0^{+\infty} |k_f(x)| dx$ converge.
- 6. Soit X une variable aléatoire possédant une densité f , continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et nulle sur $\mathbb{R}_-^*$. Justifier qu'il n'existe aucune variable aléatoire Y à densité dérivable g sur $\mathbb{R}_+^*$, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, vérifiant $g - g' = f$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie III – Étude de l'application $f \mapsto k_f$

On a établi que, pour $f \in E$, il existe une unique fonction $k_f \in E$ vérifiant (D_f) . On considère l'application $\varphi : E \rightarrow E$ définie par $\varphi(f) = k_f$.

- 1. Établir que φ est un endomorphisme de E .

-
2. Pour $a > 0$, on considère $f_a(x) = \exp(-ax)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Vérifier que $f_a \in E$, que f_a est un vecteur propre de φ , et préciser la valeur propre associée.
 3. Soit λ une valeur propre de φ et $f \in E$ un vecteur propre associé.
 - a) Montrer que λ est non nul.
 - b) Établir que f est dérivable et vérifie $f' = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) f$.
 - c) Pour $x > 0$, donner l'expression de $f(x)$ en fonction de λ et d'une constante.
 - d) Montrer que $\lambda \in]0, 1[$.
 4. Préciser l'ensemble $\text{Sp}(\varphi)$ des valeurs propres de φ et, pour chaque valeur propre λ , proposer une base de l'espace propre associé.