EDHEC

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2011

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Exercice 1

Exercice 1 – Polynôme annulateur ayant 1 pour racine simple

$u \in \mathcal{L}(E)$, $\dim E = n$, $Q(u) = 0$ avec $Q(X) = (X-1)Q_1(X)$ et $Q_1(1) \neq 0$; $E_1 = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{Id})$.

Corrigé – Exercice 1.

1. Image de $u - \mathrm{Id}$.

Deux polynômes en u commutent ; comme $Q(X) = Q_1(X)(X-1)$, on a $Q_1(u)\circ(u-\mathrm{Id}) = Q(u) = 0$. Soit $y \in \operatorname{Im}(u - \mathrm{Id})$: il existe $x \in E$ tel que $y = (u - \mathrm{Id})(x)$, et alors $Q_1(u)(y) = Q(u)(x) = 0$.

$$\boxed{\operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}) \subset \operatorname{Ker}(Q_1(u)).}$$

2. Le sous-espace E_1.

a) Soit $x \in E_1$: $u(x) = x$, donc, par une récurrence immédiate, $u^k(x) = x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En écrivant $Q_1(X) = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$:

$$Q_1(u)(x) = \sum_{k=0}^{q} b_k u^k(x) = \Big(\sum_{k=0}^{q} b_k\Big)x.$$

$$\boxed{\forall x \in E_1, \quad Q_1(u)(x) = Q_1(1)\, x.}$$

b) Si $x \in E_1 \cap \operatorname{Ker}(Q_1(u))$, alors, par a), $0 = Q_1(u)(x) = Q_1(1)x$. Comme $Q_1(1) \neq 0$, on obtient $x = 0_E$. L'inclusion réciproque est claire.

$$\boxed{E_1 \cap \operatorname{Ker}(Q_1(u)) = \{0_E\}.}$$

c) Par le théorème du rang appliqué à $u - \mathrm{Id}$, $\dim \operatorname{Im}(u - \mathrm{Id}) = n - \dim E_1$. Par la question 1, $\dim \operatorname{Ker}(Q_1(u)) \geqslant n - \dim E_1$. Par b), la somme $E_1 + \operatorname{Ker}(Q_1(u))$ est directe, donc

$$\dim\big(E_1 \oplus \operatorname{Ker}(Q_1(u))\big) = \dim E_1 + \dim \operatorname{Ker}(Q_1(u)) \geqslant n.$$

Ce sous-espace de E est donc de dimension n : il est égal à E.

$$\boxed{E = E_1 \oplus \operatorname{Ker}(Q_1(u)).}$$

3. Caractérisation de $Q_1(u) = 0$.

Si $Q_1(u) = 0$, alors $\mathrm{Ker}(Q_1(u)) = E$, et 2b) donne $E_1 = E_1 \cap E = \{0_E\}$: 1 n'est pas valeur propre de u.

Réciproquement, si 1 n'est pas valeur propre de u, alors $E_1 = \{0_E\}$, et 2c) donne $E = \mathrm{Ker}(Q_1(u))$, c'est-à-dire $Q_1(u) = 0$.

$$\boxed{Q_1(u) = 0 \iff 1 \notin \mathrm{Sp}(u).}$$

4. Cas $Q(X) = (X-1)(X+1)^2$, $\dim E = 3$.

Ici $Q_1(X) = (X+1)^2$ et $Q_1(1) = 4 \neq 0$. Par 2c), $E = E_1 \oplus F$ avec $F = \mathrm{Ker}\big((u+\mathrm{Id})^2\big)$.

- Si $\dim E_1 = 3$, alors $E_1 = E$, donc $u = \mathrm{Id}$, dont la matrice dans toute base est I_3 : u est diagonalisable.
- Si $\dim E_1 = 2$, alors $\dim F = 3 - 2 = 1$. Le sous-espace F est stable par u : si $x \in F$, $(u+\mathrm{Id})^2(u(x)) = u\big((u+\mathrm{Id})^2(x)\big) = 0$. Soit e_3 un vecteur non nul de F : $F = \mathrm{Vect}(e_3)$ et $u(e_3) \in F$, donc il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $u(e_3) = \mu e_3$. Alors $0 = (u+\mathrm{Id})^2(e_3) = (\mu+1)^2 e_3$, d'où $\mu = -1$. Si (e_1, e_2) est une base de E_1, la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de E (somme directe), formée de vecteurs propres de u, et

$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{Si } \dim E_1 \geqslant 2,\ u \text{ est diagonalisable.}}$$

Exercice 2

Exercice 2 – Reconstitution de paires

Urne de $2n$ boules (numéros 1 à n, chacun deux fois) ; tirages simultanés de deux boules ; T_i : nombre de tirages nécessaires pour reconstituer i paires.

Corrigé – Exercice 2.

1. Loi de T_1.

a) Lors d'un tirage dans une urne contenant $2m$ boules (m numéros, chacun deux fois), les $\binom{2m}{2} = m(2m-1)$ paires de boules sont équiprobables, et exactement m d'entre elles portent deux fois le même numéro. La probabilité de reconstituer une paire vaut donc

$$\frac{m}{m(2m-1)} = \frac{1}{2m-1}.$$

Tant qu'aucune paire n'est reconstituée, la composition de l'urne ne change pas ($m = n$). Notons A_j l'événement « une paire est reconstituée au j-ième tirage ». Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $[T_1 = k] = \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$, et la formule des probabilités

composées donne, avec $p = \frac{1}{2n-1} \in]0,1[$ (car $n \geqslant 2$) :

$$\mathbb{P}(T_1 = k) = (1-p)^{k-1}p = \left(\frac{2n-2}{2n-1}\right)^{k-1} \frac{1}{2n-1}.$$

$$\boxed{T_1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2n-1}\right).}$$

b) L'espérance d'une loi géométrique de paramètre p vaut $\frac{1}{p}$.

$$\boxed{\mathbb{E}(T_1) = 2n-1.}$$

2. Simulation de T_1.

Les variables `a` (uniforme sur $[\![1,n]\!]$) et `b` (uniforme sur $[\![1,2n-1]\!]$) sont indépendantes, donc

$$\mathbb{P}(a=b) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(a=j)\mathbb{P}(b=j) = n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{2n-1} :$$

l'événement $[a=b]$ simule la reconstitution d'une paire. On recommence tant que $a \neq b$, en comptant les tirages dans `t`.

```
import numpy.random as rd

def simulT1(n):
    a = rd.randint(1, n + 1)
    b = rd.randint(1, 2*n)
    t = 1
    while a != b:
        a = rd.randint(1, n + 1)
        b = rd.randint(1, 2*n)
        t = t + 1
    return t
```

La condition à compléter est `a != b`.

3. Les variables X_i.

a) $T_i - T_{i-1}$ est le nombre de tirages effectués après la reconstitution de la $(i-1)$-ième paire, jusqu'à la reconstitution de la i-ième (incluse).

X_i est le nombre de tirages nécessaires pour passer de $i-1$ à i paires reconstituées.

b) Pour $i = 1$, c'est la question 1. Soit $i \in [\![2,n]\!]$. Après la reconstitution de $i-1$ paires, l'urne contient $2(n-i+1)$ boules ($n-i+1$ numéros, chacun deux fois), et cette composition reste inchangée jusqu'à la reconstitution suivante. Par le calcul de 1a) avec $m = n-i+1$, chaque tirage reconstitue une paire avec la probabilité $p_i = \frac{1}{2n-2i+1}$. Comme en 1a), pour tout $j \geqslant i-1$ tel que $\mathbb{P}(T_{i-1}=j) > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}_{[T_{i-1}=j]}(X_i = k) = (1-p_i)^{k-1}p_i.$$

Par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $([T_{i-1}=j])_{j \geqslant i-1}$:

$$\mathbb{P}(X_i = k) = \sum_{j \geqslant i-1} \mathbb{P}(T_{i-1}=j)(1-p_i)^{k-1}p_i = (1-p_i)^{k-1}p_i.$$

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!], \quad X_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2n-2i+1}\right), \qquad \mathbb{E}(X_i) = 2n-2i+1.}$$

(Pour $i = n$, $p_n = 1$ et $X_n = 1$ presque sûrement.)

c) Par télescopage, $T_n = X_1 + \sum_{i=2}^{n}(T_i - T_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Chaque X_i admet une espérance, donc T_n aussi, et par linéarité, avec $k = n - i + 1$:

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{i=1}^{n}(2n-2i+1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2.$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) = n^2.}$$

4. Le nombre S_n de paires en n tirages.

a) $[S_n = 0]$ signifie qu'aucune paire n'est reconstituée lors des n premiers tirages, soit $[S_n = 0] = [T_1 > n]$. Par 1a) :

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{P}(T_1 > n) = (1-p)^n.$$

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n = 0) = \left(\frac{2n-2}{2n-1}\right)^n.}$$

b) On a $\ln \mathbb{P}(S_n = 0) = n \ln\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)$. Comme $\frac{1}{2n-1} \to 0$ et $\ln(1+v) \underset{v\to 0}{\sim} v$:

$$n \ln\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n}{2n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{2}.$$

Par continuité de l'exponentielle :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = \mathrm{e}^{-1/2}.}$$

c) $[S_n = n]$ signifie que chacun des n tirages reconstitue une paire. Si les $k-1$ premiers tirages ont tous reconstitué une paire, l'urne contient $2(n-k+1)$ boules au k-ième tirage, et ce tirage reconstitue une paire avec la probabilité $\frac{1}{2(n-k+1)-1}$. Par la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(S_n = n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2(n-k+1)-1} = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{2j-1}.$$

Or $\prod_{j=1}^{n}(2j-1) = \dfrac{(2n)!}{\prod_{j=1}^{n}(2j)} = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n = n) = \frac{n!\,2^n}{(2n)!}.}$$

5. La fonction `mystere`.

La variable `m` contient le nombre de numéros dont les deux boules sont encore dans l'urne (l'urne contient $2m$ boules), et `z` le nombre de paires reconstituées. À chacun des n passages dans la boucle, comme en question 2, l'événement $[a = b]$ a pour probabilité $\frac{1}{2m-1}$, qui est la probabilité de reconstituer une paire dans une urne de $2m$ boules. Dans ce cas, on augmente `z` de 1 et on retire la paire (`m` diminue de 1). On a toujours $m \geqslant 1$ lors d'un tirage, car $m = 0$ exige $z = n$, ce qui ne peut se produire qu'au n-ième tirage.

`mystere(n)` simule n tirages selon le protocole et renvoie une réalisation de S_n.

Exercice 3

Exercice 3 – Polynômes de Laguerre

$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Corrigé – Exercice 3.

1. Convergence.

La fonction $t \mapsto P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Comme PQ est un polynôme, $t^2 P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées : il existe $A \geqslant 1$ tel que, pour $t \geqslant A$, $|P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}| \leqslant \frac{1}{t^2}$. L'intégrale $\int_A^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge (Riemann), donc, par comparaison de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} |P(t)Q(t)|\mathrm{e}^{-t}\,dt$ converge.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt \text{ converge (absolument).}}$$

2. Une relation de dérivation.

a) Soit $A > 0$. On intègre par parties sur le segment $[0, A]$ avec $f = PQ$, de classe $\mathcal{C}^1$, $f' = P'Q + PQ'$, et $v : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$, de classe $\mathcal{C}^1$, $v'(t) = -\mathrm{e}^{-t}$:

$$\int_0^A (P'(t)Q(t) + P(t)Q'(t))\mathrm{e}^{-t}\,dt = \Big[P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^A + \int_0^A P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt.$$

Le crochet vaut $P(A)Q(A)\mathrm{e}^{-A} - P(0)Q(0)$, et $P(A)Q(A)\mathrm{e}^{-A} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées. Toutes les intégrales convergent par 1 ($P', Q' \in \mathbb{R}_n[X]$). En faisant tendre A vers $+\infty$:

$$\boxed{\langle P', Q\rangle + \langle P, Q'\rangle = \langle P, Q\rangle - P(0)Q(0).}$$

b) On applique a) avec $Q = P$: $2\langle P', P\rangle = \|P\|^2 - P(0)^2$. Comme P n'est pas constant, $\deg P' = \deg P - 1 < \deg P$, donc $\langle P', P\rangle = 0$ par hypothèse. Ainsi $P(0)^2 = \|P\|^2$.

$$\boxed{|P(0)| = \|P\|.}$$

3. Existence et unicité de la famille $(L_0, \dots, L_n)$.

a) On a $L_0 = M_0 = 1$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. La famille $(L_0, \dots, L_{k-1})$ est orthonormale, donc libre ; elle est formée de k polynômes de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$, qui est de dimension k : c'est une base de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Comme L_k est orthogonal à $L_0, \dots, L_{k-1}$, il est orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Ainsi $L_k \in F_k$, où F_k désigne l'orthogonal de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}_k[X]$, de dimension $(k+1) - k = 1$. Comme $L_k \neq 0$, $F_k = \mathrm{Vect}(L_k)$. Le même raisonnement donne $M_k \in F_k$, donc $M_k = \alpha L_k$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. En évaluant en 0 : $1 = M_k(0) = \alpha L_k(0) = \alpha$.

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], \quad L_k = M_k.}$$

b) **i)** Par construction de Gram-Schmidt, $(P_0, \dots, P_n)$ est orthonormale et, pour tout k, $\mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_k) = \mathrm{Vect}(1, \dots, X^k) = \mathbb{R}_k[X]$. On a $P_0 = \frac{1}{\|1\|} = 1$, car

$\|1\|^2 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt = 1$; donc $P_0(0) = 1 \neq 0$. Soit $k \geqslant 1$. P_k est orthogonal à $P_0, \dots, P_{k-1}$, donc à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Ainsi $P_k \notin \mathbb{R}_{k-1}[X]$ (sinon il serait orthogonal à lui-même, donc nul), et $\deg P_k = k \geqslant 1$. Le polynôme P_k est donc non constant et orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur : par 2b), $|P_k(0)| = \|P_k\| = 1$.

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P_k(0) \neq 0 \quad (P_k(0) = \pm 1).}$$

ii) On pose $L_k = \dfrac{P_k}{P_k(0)} = \pm P_k$. Alors $L_0 = 1$, $\deg L_k = k$, $L_k(0) = 1$, et la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est orthonormale (les produits scalaires sont ceux des P_k, au signe près). Elle comporte $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ vecteurs : c'est une base orthonormale.

$$\boxed{L_k = \frac{P_k}{P_k(0)} \ (0 \leqslant k \leqslant n) \text{ définit une famille vérifiant } \mathcal{R}.}$$

c) Par b) et a), il existe une unique famille vérifiant $\mathcal{R}$. On utilise $\int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}\,dt = \Gamma(k+1) = k!$.

On écrit $L_1 = 1 + aX$ (car $L_1(0) = 1$). La condition $\langle L_1, L_0\rangle = 0$ donne $1 + a = 0$, donc $L_1 = 1 - X$; on vérifie que $\|L_1\|^2 = \int_0^{+\infty}(1 - 2t + t^2)\mathrm{e}^{-t}\,dt = 1 - 2 + 2 = 1$.

On écrit $L_2 = 1 + aX + bX^2$. Comme $X = L_0 - L_1$, L_2 est orthogonal à 1 et à X :

$$\langle L_2, 1\rangle = 1 + a + 2b = 0, \qquad \langle L_2, X\rangle = 1 + 2a + 6b = 0.$$

La première équation donne $a = -1 - 2b$, puis la seconde $-1 + 2b = 0$: $b = \frac{1}{2}$ et $a = -2$. On vérifie que $\|L_2\|^2 = \int_0^{+\infty} \left(1 - 4t + 5t^2 - 2t^3 + \frac{t^4}{4}\right)\mathrm{e}^{-t}\,dt = 1 - 4 + 10 - 12 + 6 = 1$.

$$\boxed{L_1 = 1 - X, \qquad L_2 = 1 - 2X + \frac{X^2}{2}.}$$

Problème

Partie I – La loi exponentielle

Partie I – Maximum de variables exponentielles

(X_k) i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$, $g(x) = \mathrm{e}^{-x}\exp(-\mathrm{e}^{-x})$.

Corrigé – Partie I.

1. La densité g.

a) g est continue sur $\mathbb{R}$ et positive. La fonction $\Phi : x \mapsto \exp(-\mathrm{e}^{-x})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec $\Phi'(x) = \mathrm{e}^{-x}\exp(-\mathrm{e}^{-x}) = g(x)$. Pour $A < B$, $\int_A^B g = \Phi(B) - \Phi(A)$. Or $\mathrm{e}^{-B} \xrightarrow[B\to+\infty]{} 0$, donc $\Phi(B) \to 1$, et $\mathrm{e}^{-A} \xrightarrow[A\to-\infty]{} +\infty$, donc $\Phi(A) \to 0$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g$ converge et vaut 1.

$$\boxed{g \text{ est une densité de probabilité.}}$$

b) Pour $x \in \mathbb{R}$, $F_G(x) = \int_{-\infty}^{x} g = \Phi(x) - \lim_{A\to-\infty} \Phi(A)$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_G(x) = \exp(-\mathrm{e}^{-x}).}$$

2. Convergence en loi.

a) Pour $x \in \mathbb{R}$, $[M_n \leqslant x] = \bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leqslant x]$, donc, par indépendance, $F_{M_n}(x) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant x)^n$.

$$\boxed{F_{M_n}(x) = 0 \ \ (x < 0), \qquad F_{M_n}(x) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda x})^n \ \ (x \geqslant 0).}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\lambda > 0$, $F_{U_n}(x) = \mathbb{P}\left(M_n \leqslant \frac{x+\ln n}{\lambda}\right)$. Pour $n \geqslant \mathrm{e}^{-x}$, on a $x + \ln n \geqslant 0$, donc

$$F_{U_n}(x) = (1 - \mathrm{e}^{-x-\ln n})^n = \left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)\right).$$

Comme $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n} \to 0$ et $\ln(1+v) \underset{v\to0}{\sim} v$, $n \ln\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) \sim -\mathrm{e}^{-x}$, et cette quantité tend vers $-\mathrm{e}^{-x}$. Par continuité de l'exponentielle, $F_{U_n}(x) \to \exp(-\mathrm{e}^{-x}) = F_G(x)$, et ce pour tout réel x. Par définition de la convergence en loi :

$$\boxed{U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} G, \quad \text{où } G \text{ a pour fonction de répartition } x \mapsto \exp(-\mathrm{e}^{-x}).}$$

Partie II – La loi normale

Partie II – Maximum de variables normales

(X_k) i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$; on note $s_n = \sqrt{2\ln(n)}$ pour $n \geqslant 2$.

Corrigé – Partie II.

1. Encadrement de $\mathbb{P}(X_1 > x)$.

a) Soit $x > 0$. Pour $u \geqslant x$, $0 \leqslant \frac{\varphi(u)}{u^2} \leqslant \frac{\varphi(u)}{x^2}$, et $\int_x^{+\infty} \varphi$ converge (φ est une densité). Par comparaison de fonctions positives, $\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du$ converge.
Soit $A > x$. Comme $\varphi'(u) = -u\varphi(u)$, on intègre par parties sur le segment $[x, A]$ avec $f : u \mapsto \frac{1}{u}$, de classe $\mathcal{C}^1$, $f'(u) = -\frac{1}{u^2}$, et $h = -\varphi$, de classe $\mathcal{C}^1$, $h'(u) = u\varphi(u)$:

$$\begin{aligned}\int_x^A \varphi(u)\,du = \int_x^A f(u)h'(u)\,du &= \left[-\frac{\varphi(u)}{u}\right]_x^A - \int_x^A \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du \\ &= \frac{\varphi(x)}{x} - \frac{\varphi(A)}{A} - \int_x^A \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du.\end{aligned}$$

Comme $\frac{\varphi(A)}{A} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$, on fait tendre A vers $+\infty$:

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1 > x) = \int_x^{+\infty} \varphi(u)\,du = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du.}$$

b) L'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2}\,du$ est positive, et elle est majorée par $\frac{1}{x^2}\int_x^{+\infty}\varphi(u)\,du = \frac{\mathbb{P}(X_1>x)}{x^2}$. Avec a) :

$$\boxed{\frac{\varphi(x)}{x} - \frac{\mathbb{P}(X_1>x)}{x^2} \leqslant \mathbb{P}(X_1>x) \leqslant \frac{\varphi(x)}{x}.}$$

L'inégalité de gauche s'écrit $\frac{\varphi(x)}{x} \leqslant \mathbb{P}(X_1>x) + \frac{\mathbb{P}(X_1>x)}{x^2}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1>x) \leqslant \frac{\varphi(x)}{x} \leqslant \mathbb{P}(X_1>x)\left(1+\frac{1}{x^2}\right).}$$

2. Définition de x_n.

Soit $h : x \mapsto \frac{\varphi(x)}{x}$ sur $]0,+\infty[$. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$, et

$$h'(x) = \frac{x\varphi'(x)-\varphi(x)}{x^2} = -\frac{(1+x^2)\varphi(x)}{x^2} < 0.$$

h est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, avec $\lim_{x\to 0^+} h(x) = +\infty$ (car $\varphi(0)>0$) et $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$. Par le théorème de la bijection, h réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$. Comme $\frac{c}{n} \in]0,+\infty[$:

$$\boxed{\text{l'équation } \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{c}{n} \text{ admet une unique solution } x_n \in]0,+\infty[.}$$

3. Limite de x_n.

On a $x_n = h^{-1}\left(\frac{c}{n}\right)$, et h^{-1} est strictement décroissante, comme h. La suite $\left(\frac{c}{n}\right)$ étant décroissante, (x_n) est croissante. Si elle était majorée par un réel $B>0$, on aurait, par décroissance de h, $\frac{c}{n} = h(x_n) \geqslant h(B) > 0$ pour tout n, ce qui contredit $\frac{c}{n} \to 0$. Par le théorème de la limite monotone, la suite croissante et non majorée (x_n) tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty.}$$

4. Équation vérifiée par x_n.

On a $\dfrac{\mathrm{e}^{-x_n^2/2}}{\sqrt{2\pi}\,x_n} = \dfrac{c}{n}$, avec des membres strictement positifs. En prenant le logarithme :

$$-\frac{x_n^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(2\pi) - \ln(x_n) = \ln(c) - \ln(n).$$

En multipliant par -2 : $x_n^2 + 2\ln(x_n) = 2\ln(n) - \ln(2\pi) - \ln(c^2)$.

$$\boxed{x_n^2 + 2\ln(x_n) = 2\ln(n) - \ln(2c^2\pi).}$$

5. Équivalent de x_n.

Comme $x_n \to +\infty$, $\frac{2\ln(x_n)}{x_n^2} \to 0$ par croissances comparées, donc $x_n^2 + 2\ln(x_n) = x_n^2\left(1+\frac{2\ln(x_n)}{x_n^2}\right) \sim x_n^2$. De même, $2\ln(n) - \ln(2c^2\pi) \sim 2\ln(n)$. Ainsi $\frac{x_n^2}{2\ln(n)} \to 1$, et, par continuité de la racine carrée, $\frac{x_n}{\sqrt{2\ln(n)}} \to 1$.

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\ln(n)}.}$$

Pour $n \geqslant 2$, on pose $\varepsilon_1(n) = x_n - \sqrt{2\ln(n)}$. Alors $\frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln(n)}} = \frac{x_n}{\sqrt{2\ln(n)}} - 1 \to 0$.

$$\boxed{x_n = \sqrt{2\ln(n)} + \varepsilon_1(n), \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln(n)}} = 0.}$$

6. Terme suivant.

a) Pour $n \geqslant 2$, $x_n = s_n + \varepsilon_1(n)$, avec $s_n^2 = 2\ln(n)$, donc $x_n^2 = 2\ln(n) + 2s_n\varepsilon_1(n) + \varepsilon_1(n)^2$. Comme $1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{s_n} = \frac{x_n}{s_n} > 0$:

$$2\ln(x_n) = 2\ln(s_n) + 2\ln\left(1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{s_n}\right), \qquad 2\ln(s_n) = \ln\big(2\ln(n)\big) = \ln 2 + \ln(\ln(n)).$$

On reporte dans la relation de la question 4, et on simplifie $2\ln(n)$:

$$2s_n\varepsilon_1(n) + \varepsilon_1(n)^2 + 2\ln\left(1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{s_n}\right) = -\ln(\ln(n)) - \ln 2 - \ln(2\pi c^2).$$

$$\boxed{2\sqrt{2\ln(n)}\,\varepsilon_1(n) + (\varepsilon_1(n))^2 + 2\ln\left(1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2\ln(n)}}\right) = -\ln(\ln(n)) - \ln(4\pi c^2).}$$

b) On note $w_n = \frac{\varepsilon_1(n)}{s_n} \to 0$ et $\psi(w) = \frac{\ln(1+w)}{w}$ pour $w \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, avec $\psi(0) = 1$; ψ est continue en 0, car $\ln(1+w) \underset{w\to0}{\sim} w$. On a $2\ln(1+w_n) = 2w_n\psi(w_n) = \frac{2\varepsilon_1(n)\psi(w_n)}{s_n}$, donc le membre de gauche de a) s'écrit

$$2s_n\varepsilon_1(n)\left(1 + \frac{w_n}{2} + \frac{\psi(w_n)}{s_n^2}\right), \qquad \text{avec } 1 + \frac{w_n}{2} + \frac{\psi(w_n)}{2\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Le membre de droite vaut $-\ln(\ln(n))\left(1 + \frac{\ln(4\pi c^2)}{\ln(\ln(n))}\right) \sim -\ln(\ln(n))$, car $\ln(\ln(n)) \to +\infty$. Pour n assez grand, la parenthèse de gauche est non nulle, et le quotient de $2s_n\varepsilon_1(n)$ par $-\ln(\ln(n))$ tend vers 1.

$$\boxed{2\varepsilon_1(n)\sqrt{2\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(\ln(n)).}$$

Pour $n \geqslant 2$, on pose $\varepsilon_2(n) = \varepsilon_1(n) + \frac{\ln(\ln(n))}{2s_n}$. Pour $n \geqslant 3$, $\ln(\ln(n)) > 0$ et

$$\varepsilon_2(n)\frac{2s_n}{\ln(\ln(n))} = \frac{2s_n\varepsilon_1(n)}{\ln(\ln(n))} + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1 + 1 = 0.$$

$$\boxed{\varepsilon_1(n) = -\frac{\ln(\ln(n))}{2\sqrt{2\ln(n)}} + \varepsilon_2(n), \qquad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_2(n)\frac{2\sqrt{2\ln(n)}}{\ln(\ln(n))} = 0.}$$

7. Convergence en loi de $\frac{M_n - b_n}{a_n}$.

On fixe $x \in \mathbb{R}$ et $c = \mathrm{e}^{-x}$, de sorte que $\ln(c) = -x$; x_n et $\varepsilon(n)$ sont associés à cette valeur de c. On note $y_n = a_n x + b_n$.

a) Par le résultat admis, avec $-\frac{\ln(c)}{s_n} = \frac{x}{s_n} = a_n x$:

$$x_n = s_n - \frac{\ln(\ln(n))}{2s_n} - \frac{\ln(4\pi)}{2s_n} + a_n x + \varepsilon(n) = b_n + a_n x + \varepsilon(n).$$

$$\boxed{a_n x + b_n = x_n - \varepsilon(n).}$$

b) Comme $\varepsilon(n)s_n \to 0$ et $s_n \to +\infty$, on a $\varepsilon(n) \to 0$, d'où $\frac{y_n}{x_n} = 1 - \frac{\varepsilon(n)}{x_n} \to 1$. En particulier, $y_n \to +\infty$, et $y_n > 0$ pour n assez grand. Ensuite,

$$\frac{\varphi(y_n)}{\varphi(x_n)} = \exp\left(\frac{x_n^2 - y_n^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{\varepsilon(n)(x_n + y_n)}{2}\right),$$

avec $\varepsilon(n)(x_n + y_n) = \varepsilon(n)s_n \cdot \frac{2x_n - \varepsilon(n)}{s_n} \to 0 \times 2 = 0$, par la question 5. Par continuité de l'exponentielle, $\frac{\varphi(y_n)}{\varphi(x_n)} \to 1$. Ainsi

$$\frac{\varphi(y_n)}{y_n} = \frac{\varphi(y_n)}{\varphi(x_n)} \cdot \frac{x_n}{y_n} \cdot \frac{\varphi(x_n)}{x_n} \sim \frac{\varphi(x_n)}{x_n} = \frac{c}{n}.$$

$$\boxed{\frac{\varphi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}.}$$

c) Pour n assez grand, $y_n > 0$, et la question 1b) donne, puisque $\mathbb{P}(X_1 > y_n) > 0$:

$$1 \leqslant \frac{\varphi(y_n)/y_n}{\mathbb{P}(X_1 > y_n)} \leqslant 1 + \frac{1}{y_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Par le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\frac{\varphi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathbb{P}(X_1 > a_n x + b_n).}$$

On note $p_n = \mathbb{P}(X_1 > y_n) \in]0, 1[$. Par b), $p_n \sim \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}$, donc $p_n \to 0$ et $np_n \to \mathrm{e}^{-x}$. Comme $a_n > 0$, par indépendance des X_k :

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right) = \mathbb{P}(M_n \leqslant y_n) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant y_n)^n = (1 - p_n)^n = \exp\big(n \ln(1 - p_n)\big).$$

Or $n \ln(1 - p_n) = -np_n \cdot \frac{\ln(1-p_n)}{-p_n} \to -\mathrm{e}^{-x} \times 1$, car $\ln(1 + v) \underset{v\to0}{\sim} v$. Par continuité de l'exponentielle, $\mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right) \to \exp(-\mathrm{e}^{-x}) = F_G(x)$, et ce pour tout réel x. Par définition de la convergence en loi :

$$\boxed{\left(\frac{M_n - b_n}{a_n}\right)_{n\geqslant 2} \text{ converge en loi vers } G.}$$