

**Année :** 2011

**École :** EDHEC

**Option :** Mathématiques approfondies

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

## Sommaire

|                                                                                                                              |          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>Exercice 1 :</b> <i>Thèmes abordés : réduction ; applications linéaires</i>                                               | <b>1</b> |
| <b>Exercice 2 :</b> <i>Thèmes abordés : Probabilité discrètes ; Python</i>                                                   | <b>1</b> |
| <b>Exercice 3 :</b> <i>Thèmes abordés : intégrales généralisées ; espaces vectoriels ; algèbre bilinéaire</i>                | <b>3</b> |
| <b>Problème :</b> <i>Thèmes abordés : variables à densité ; convergences de variables ; suites ; intégrales généralisées</i> | <b>4</b> |

**Consignes**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

**L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.**

**Exercice 1**

*Thèmes abordés : réduction ; applications linéaires*

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie, notée  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . On note  $\text{Id}$  l'identité de  $E$ .

Si  $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p$  est un élément de  $\mathbb{R}[X]$ , on rappelle qu'on désigne par  $P(u)$  l'endomorphisme suivant :  $P(u) = a_0 \text{Id} + a_1u + \cdots + a_pu^p$ , où  $u^k$  est la composée  $\underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$

( $u^0 = \text{Id}$  par convention).

Dans toute la suite,  $Q$  est un polynôme qui admet 1 pour racine simple et tel que  $Q(u) = 0$ . Ainsi, on peut écrire  $Q(X) = (X - 1)Q_1(X)$  avec  $Q_1(1) \neq 0$ .

- 1) Montrer que l'image de  $(u - \text{Id})$  est contenue dans  $\text{Ker}(Q_1(u))$ .
- 2) On note  $E_1 = \text{Ker}(u - \text{Id})$ .
  - a) Montrer que si  $x \in E_1$  alors  $Q_1(u)(x) = Q_1(1)x$ .
  - b) En déduire que  $E_1 \cap \text{Ker}(Q_1(u)) = \{0_E\}$ .
  - c) En déduire à l'aide du théorème du rang que  $E = E_1 \oplus \text{Ker}(Q_1(u))$ .
- 3) Montrer que  $Q_1(u) = 0$  si, et seulement si, 1 n'est pas valeur propre de  $u$ .
- 4) On suppose dans cette question que  $Q(X) = (X - 1)(X + 2)^2$ , que  $E$  est de dimension 3 et que 1 est valeur propre de  $u$  ; on note  $E_1$  l'espace propre associé à la valeur propre 1. Montrer que si la dimension de  $E_1$  est supérieure ou égale à 2, l'endomorphisme  $u$  est diagonalisable (on pourra distinguer deux cas, suivant que la dimension de  $E_1$  est égale à 2 ou égale à 3).

**Exercice 2**

*Thèmes abordés : Probabilité discrètes ; Python*

On considère un entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant  $2n$  boules numérotées de 1 à  $n$ , chaque numéro apparaissant deux fois. On effectue « au hasard » une succession de tirages simultanés de deux boules de cette urne selon le protocole suivant :

- à chaque tirage de deux boules, si les deux boules tirées portent le même numéro, on ne remet pas les deux boules dans l'urne et on dit qu'une paire est constituée ;

- si les deux boules tirées portent des numéros différents, on les remet dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

Pour tout élément  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et tout entier naturel  $k$  non nul, on pose  $T_i = k$  si  $k$  tirages exactement ont été nécessaires pour constituer  $i$  paires.

On admet qu'il existe un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$  permettant de modéliser cette expérience et que, pour tout entier  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $T_i$  est une variable aléatoire définie sur cet espace.

- 1)
  - a) Déterminer la loi de  $T_1$  et reconnaître cette loi.
  - b) Donner, sans calcul, la valeur de l'espérance de  $T_1$ .
- 2) Compléter le programme Python suivant afin qu'il affiche une réalisation de la variable  $T_1$  :

```
from random import randint

n = int(input())
t = 0
while True:
    a = randint(1, n)
    b = randint(1, 2*n - 1)
    t = t + 1
    if .....:
        break
print(t)
```

- 3) On pose  $X_1 = T_1$  et, pour tout  $i$  de  $\llbracket 2, n \rrbracket$ ,  $X_i = T_i - T_{i-1}$ .
  - a) Que représente la variable  $X_i$  ?
  - b) Déterminer, pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , la loi de  $X_i$  ainsi que son espérance.
  - c) En déduire que  $T_n$  admet une espérance mathématique et que l'on a :  $\mathbb{E}(T_n) = n^2$ .
- 4) On effectue une suite de  $n$  tirages de deux boules selon le protocole précédent. On note  $S_n$  la variable aléatoire égale au nombre de paires reconstituées lors de ces  $n$  tirages.
  - a) Calculer  $\mathbb{P}(S_n = 0)$ .
  - b) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)$ .
  - c) Montrer que :

$$\mathbb{P}(S_n = n) = \frac{n!2^n}{(2n)!}.$$

- 5) Expliquer ce que fait le programme Python suivant :

```
from random import randint

n = int(input())
m = n
z = 0
for k in range(n):
    a = randint(1, m)
```

```

b = randint(1, 2*m - 1)
if a == b:
    z = z + 1
    m = m - 1
print(z)

```

### Exercice 3

*Thèmes abordés : intégrales généralisées ; espaces vectoriels ; algèbre bilinéaire*

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note  $\mathbb{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à  $n$ .

- 1) Montrer que, pour tout couple  $(P, Q)$  d'éléments de  $\mathbb{R}_n[X]$ , l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$$

est convergente.

On admet que l'application, notée  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , de  $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , définie par

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X], \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt,$$

est un produit scalaire. On note  $\| \cdot \|$  la norme associée.

- 2) a) Soit  $P$  et  $Q$  deux éléments de  $\mathbb{R}_n[X]$ ,  $P'$  et  $Q'$  leurs polynômes dérivés respectifs. Établir la relation suivante :

$$\langle P', Q \rangle + \langle P, Q' \rangle = \langle P, Q \rangle - P(0)Q(0).$$

- b) En déduire que si  $P$  est un polynôme non constant de  $\mathbb{R}_n[X]$ , orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur, alors on a  $|P(0)| = \|P\|$ .

- 3) On se propose de démontrer dans cette question qu'il existe une unique famille de polynômes  $(L_0, L_1, \dots, L_n)$  vérifiant :

$$(\mathcal{R}) \quad \begin{cases} L_0 = 1, \\ \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \deg(L_k) = k, \\ \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_k(0) = 1, \\ (L_0, L_1, \dots, L_n) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}_n[X]. \end{cases}$$

- a) On suppose qu'il existe deux familles de polynômes  $(L_0, L_1, \dots, L_n)$  et  $(M_0, M_1, \dots, M_n)$  vérifiant les relations  $\mathcal{R}$ . Montrer que, pour tout élément  $k$  de  $\llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $L_k = M_k$ .

- b) On note  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  la famille obtenue (à partir de la base canonique  $(1, X, \dots, X^n)$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ ) par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

- Justifier, pour tout  $k$  de  $\llbracket 0, n \rrbracket$ , la relation  $P_k(0) \neq 0$ .
- En déduire une famille  $(L_0, L_1, \dots, L_n)$  vérifiant  $\mathcal{R}$ .

- c) Conclure et calculer explicitement  $L_1$  et  $L_2$ .

## Problème

*Thèmes abordés : variables à densité ; convergences de variables ; suites ; intégrales généralisées*

Toutes les variables aléatoires intervenant dans ce problème sont définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ . On considère une suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On considère aussi, pour tout entier naturel  $n$  non nul, la variable aléatoire  $M_n$  définie par

$$M_n = \sup(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

c'est-à-dire que, pour tout  $\omega$  de  $\Omega$ , on a  $M_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$ .

On cherche alors des suites réelles  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , où la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est à termes strictement positifs, telles que la suite

$$\left( \frac{M_n - b_n}{a_n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

converge en loi vers une variable aléatoire non constante.

La fonction exponentielle sera indifféremment notée  $(x \mapsto e^x)$  ou  $\exp$ .

### Partie I — La loi exponentielle

On suppose dans cette partie que la loi commune des  $X_k$  est la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , où  $\lambda$  est un réel strictement positif.

1) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = e^{-x} \exp(-e^{-x}).$$

- a) Montrer que  $g$  est une densité de probabilité. On note  $G$  une variable aléatoire admettant  $g$  comme densité.
- b) Déterminer la fonction de répartition, notée  $F_G$ , de la variable  $G$ .

2) a) Donner, pour tout entier naturel  $n$  non nul, la fonction de répartition de la variable  $M_n$ .

- b) Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose  $U_n = \lambda M_n - \ln(n)$ . Montrer que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers une variable dont on précisera la loi.

### Partie II — La loi normale

On suppose dans cette partie que la loi commune des  $X_k$  est une loi normale centrée réduite. Soit  $\varphi$  la densité usuelle de  $X_1$ .

- 1) a) Montrer que, pour tout réel  $x > 0$ , l'intégrale  $\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2} du$  est convergente et, à l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\mathbb{P}(X_1 > x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u^2} du.$$

**b)** En déduire que, pour tout réel  $x > 0$  :

$$\frac{\varphi(x)}{x} - \frac{\mathbb{P}(X_1 > x)}{x^2} \leq \mathbb{P}(X_1 > x) \leq \frac{\varphi(x)}{x},$$

puis que :

$$\mathbb{P}(X_1 > x) \leq \frac{\varphi(x)}{x} \leq \mathbb{P}(X_1 > x) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

**2)** Soit  $c$  un réel strictement positif. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, l'équation

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{c}{n}$$

admet sur  $]0, +\infty[$  une unique solution que l'on notera  $x_n$ .

**3)** Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ .

**4)** Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$x_n^2 + 2 \ln(x_n) = 2 \ln(n) - \ln(2c^2 \pi).$$

**5)** En prenant un équivalent de chaque membre de l'équation de la question **4)**, montrer que :

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2 \ln(n)}.$$

En déduire que l'on peut écrire, pour tout entier  $n \geq 2$  :

$$x_n = \sqrt{2 \ln(n)} + \varepsilon_1(n) \quad \text{où} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2 \ln(n)}} = 0.$$

**6) a)** En utilisant la question **4)**, montrer que, pour tout entier  $n \geq 2$  :

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2 \ln(n)} \varepsilon_1(n) + (\varepsilon_1(n))^2 + 2 \ln \left(1 + \frac{\varepsilon_1(n)}{\sqrt{2 \ln(n)}}\right) \\ = -\ln(\ln(n)) - \ln(4\pi c^2). \end{aligned}$$

**b)** En prenant un équivalent de chaque membre de l'équation de la question **a)**, montrer que :

$$2\varepsilon_1(n)\sqrt{2 \ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln(\ln(n)).$$

En déduire que :

$$\varepsilon_1(n) = -\frac{\ln(\ln(n))}{2\sqrt{2 \ln(n)}} + \varepsilon_2(n), \quad \text{où} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_2(n) \frac{2\sqrt{2 \ln(n)}}{\sqrt{\ln(\ln(n))}} = 0.$$

#### Résultat admis

En poursuivant le développement asymptotique, on peut écrire, pour tout entier  $n \geq 2$  :

$$\begin{aligned} x_n = \sqrt{2 \ln(n)} - \frac{\ln(\ln(n))}{2\sqrt{2 \ln(n)}} - \frac{\ln(4\pi)}{2\sqrt{2 \ln(n)}} \\ - \frac{\ln(c)}{\sqrt{2 \ln(n)}} + \varepsilon(n), \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) \sqrt{2 \ln(n)} = 0. \end{array} \right.$$

7) On pose, pour tout entier  $n \geq 2$  :

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2 \ln(n)}} \quad \text{et} \quad b_n = \sqrt{2 \ln(n)} - \frac{\ln(\ln(n))}{2\sqrt{2 \ln(n)}} - \frac{\ln(4\pi)}{2\sqrt{2 \ln(n)}}.$$

Montrer à l'aide des questions précédentes que, pour tout réel  $x$  et pour tout entier  $n \geq 2$ , en posant  $c = e^{-x}$ , on a :

**a)**  $a_n x + b_n = x_n - \varepsilon(n) ;$

**b)**  $\frac{\varphi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{n} ;$

**c)** en déduire, en utilisant la question **1b)**, que :

$$\frac{\varphi(a_n x + b_n)}{a_n x + b_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \mathbb{P}(X_1 > a_n x + b_n),$$

puis que la suite  $\left(\frac{M_n - b_n}{a_n}\right)_{n \geq 1}$  converge en loi vers la variable  $G$  (la variable  $G$  est définie dans la partie **I**).