

emlyon business school

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2011

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Partie I – Somme de variables aléatoires de loi exponentielle

Partie I – Somme de variables de loi $\mathcal{E}(1)$

$(X_k)_{k \geq 1}$ mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Corrigé – Partie I.

1. Loi exponentielle de paramètre 1.

Une densité de $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ est donnée ci-dessous ; on a $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{1}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{1^2}$.

$$f(x) = e^{-x} \quad (x \geq 0), \quad f(x) = 0 \quad (x < 0), \quad \mathbb{E}(X) = 1, \quad \mathbb{V}(X) = 1.$$

2. Espérance, variance et densité de S_n .

a) Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = n$. Les X_k étant mutuellement indépendantes, la variance de la somme est la somme des variances : $\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) = n$.

$$\mathbb{E}(S_n) = n, \quad \mathbb{V}(S_n) = n.$$

b) La loi $\mathcal{E}(1)$ est la loi $\gamma(1)$. Par stabilité des lois gamma pour la somme de variables indépendantes, $S_n \hookrightarrow \gamma(n)$, et $\Gamma(n) = (n-1)!$.

$$f_{S_n}(x) = \frac{x^{n-1}e^{-x}}{(n-1)!} \quad (x > 0), \quad f_{S_n}(x) = 0 \quad (x \leq 0).$$

3. Simulation d'une loi exponentielle.

On a $\mathbb{P}(U = 1) = 0$, donc presque sûrement $1 - U \in]0, 1]$: Y est bien définie et $Y \geq 0$. Soit F_Y la fonction de répartition de Y .

- Si $y < 0$: $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = 0$.
- Si $y \geq 0$: par stricte croissance de $\exp$,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(\ln(1 - U) \geq -y) = \mathbb{P}(1 - U \geq e^{-y}) = \mathbb{P}(U \leq 1 - e^{-y}) = 1 - e^{-y},$$

car $1 - e^{-y} \in [0, 1[$ et $F_U(u) = u$ pour $u \in [0, 1]$.

On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(1)$, qui caractérise la loi.

$$Y = -\ln(1 - U) \hookrightarrow \mathcal{E}(1).$$

4. Simulation de S_n .

D'après la question 3, $-\ln(1 - \text{rd.random}())$ simule une variable de loi $\mathcal{E}(1)$; des appels successifs fournissent des variables indépendantes. On ajoute n telles variables.

```
def simulS(n):
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s - np.log(1 - rd.random())
    return s
```

5. Simulation de N_t .

On calcule successivement $S_1, S_2, \dots$ en ajoutant à chaque étape une nouvelle variable de loi $\mathcal{E}(1)$. La variable n compte les indices k tels que $S_k \leq t$: à la sortie de la boucle, $S_n \leq t < S_{n+1}$ (ou $S_1 > t$ et $n = 0$), donc n est la valeur de N_t . La boucle s'arrête presque sûrement : pour $n > t$, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $\mathbb{P}(S_n \leq t) \leq \mathbb{P}(|S_n - n| \geq n - t) \leq \frac{n}{(n-t)^2} \rightarrow 0$, et la suite d'événements $(S_n \leq t)$ est décroissante, donc, par le théorème de la limite monotone, $\mathbb{P}(\bigcap_n (S_n \leq t)) = 0$.

```
def simulN(t):
    s = -np.log(1 - rd.random())
    n = 0
    while s <= t:
        n = n + 1
        s = s - np.log(1 - rd.random())
    return n
```

Partie II – Polynômes de Laguerre**Partie II – Polynômes de Laguerre**

$$f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}, \quad L_n(x) = e^x f_n^{(n)}(x).$$

Corrigé – Partie II.

Toutes les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, comme produits de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$; il en est donc de même des L_n .

6. Calcul de L_0, L_1, L_2 .

On a $f_0(x) = e^{-x}$, donc $L_0(x) = e^x e^{-x} = 1$. Ensuite $f_1(x) = x e^{-x}$ et $f_1'(x) = (1-x)e^{-x}$, d'où $L_1(x) = 1 - x$. Enfin $f_2(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{2}$, $f_2'(x) = \frac{(2x-x^2)e^{-x}}{2}$, puis

$$f_2''(x) = \frac{(2-2x)e^{-x} - (2x-x^2)e^{-x}}{2} = \frac{(x^2-4x+2)e^{-x}}{2}.$$

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x, \quad L_2(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 1.$$

7. Expression de L_n .

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la formule de Leibniz appliquée au produit des fonctions $x \mapsto x^n$ et

$x \mapsto e^{-x}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$:

$$f_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (x^n)^{(j)} (e^{-x})^{(n-j)}.$$

Pour $0 \leq j \leq n$, $(x^n)^{(j)} = \frac{n!}{(n-j)!} x^{n-j}$ et $(e^{-x})^{(n-j)} = (-1)^{n-j} e^{-x}$. Donc

$$L_n(x) = e^x f_n^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!} x^{n-j}.$$

On pose $k = n - j$ et on utilise $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k.$$

8. Degré et coefficient dominant.

D'après la question 7, L_n est une fonction polynomiale de degré au plus n , et son coefficient de x^n vaut $\frac{(-1)^n}{n!} \binom{n}{n} = \frac{(-1)^n}{n!} \neq 0$.

$$L_n \text{ est polynomiale, de degré } n, \text{ de coefficient dominant } \frac{(-1)^n}{n!}.$$

9. Dérivée de f_{n+1} .

Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f'_{n+1}(x) = \frac{(n+1)x^n e^{-x} - x^{n+1} e^{-x}}{(n+1)!} = \frac{x^n e^{-x}}{n!} - \frac{x^{n+1} e^{-x}}{(n+1)!}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'_{n+1}(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x).$$

10. Relation entre L'_{n+1} , L'_n et L_n .

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, en dérivant $L_m = e^x f_m^{(m)}$:

$$L'_m(x) = e^x f_m^{(m)}(x) + e^x f_m^{(m+1)}(x) = L_m(x) + e^x f_m^{(m+1)}(x). \quad (*)$$

En dérivant $n+1$ fois la relation de la question 9 : $f_{n+1}^{(n+2)} = f_n^{(n+1)} - f_{n+1}^{(n+1)}$. Avec (*) pour $m = n+1$:

$$L'_{n+1}(x) = L_{n+1}(x) + e^x f_n^{(n+1)}(x) - e^x f_{n+1}^{(n+1)}(x) = e^x f_n^{(n+1)}(x).$$

Or, par (*) pour $m = n$, $e^x f_n^{(n+1)}(x) = L'_n(x) - L_n(x)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x).$$

11. Relation entre f_{n+1} et f_n .

$$f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1} e^{-x}}{(n+1)!} = \frac{x}{n+1} \cdot \frac{x^n e^{-x}}{n!}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1} f_n(x).$$

12. Relation de récurrence.

On a $(n+1)f_{n+1}(x) = xf_n(x)$. On dérive $n+1$ fois par la formule de Leibniz ; les dérivées de $x \mapsto x$ d'ordre au moins 2 sont nulles, donc seuls les termes d'indices 0 et 1 subsistent :

$$(n+1)f_{n+1}^{(n+1)}(x) = xf_n^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{1}f_n^{(n)}(x).$$

On multiplie par e^x et on utilise $e^x f_n^{(n+1)}(x) = L'_n(x) - L_n(x)$ (question 10) :

$$(n+1)L_{n+1}(x) = x(L'_n(x) - L_n(x)) + (n+1)L_n(x).$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad (n+1)L_{n+1}(x) = xL'_n(x) + (n+1-x)L_n(x).}$$

13. Équation différentielle.

On dérive la relation de la question 12 :

$$\begin{aligned} (n+1)L'_{n+1}(x) &= L'_n(x) + xL''_n(x) - L_n(x) + (n+1-x)L'_n(x) \\ &= xL''_n(x) + (n+2-x)L'_n(x) - L_n(x). \end{aligned}$$

Par la question 10, le membre de gauche vaut $(n+1)L'_n(x) - (n+1)L_n(x)$. Il vient

$$0 = xL''_n(x) + (n+2-x-n-1)L'_n(x) + (n+1-1)L_n(x) = xL''_n(x) + (1-x)L'_n(x) + nL_n(x).$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad xL''_n(x) - (x-1)L'_n(x) + nL_n(x) = 0.}$$

Partie III – Produit scalaire, orthogonalité, endomorphisme**Partie III – Un endomorphisme symétrique**

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x} dx, \quad T(P)(x) = xP''(x) - (x-1)P'(x).$$

Corrigé – Partie III.**14. Convergence.**

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$ converge et vaut $\Gamma(k+1) = k!$ (fonction Gamma d'Euler). Si $A(x) = \sum_{k=0}^d a_k x^k$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} A(x)e^{-x} dx$ est une combinaison linéaire d'intégrales convergentes, donc converge, et vaut $\sum_{k=0}^d a_k k!$.

$$\boxed{\forall A \in E, \quad \int_0^{+\infty} A(x)e^{-x} dx \text{ converge.}}$$

15. Produit scalaire.

Pour $P, Q \in E$, $PQ \in E$, donc $\langle P, Q \rangle$ existe par la question 14.

- Symétrie : $P(x)Q(x) = Q(x)P(x)$, donc $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$.
- Linéarité à gauche : par linéarité de l'intégrale (les intégrales convergent), $\langle \lambda P_1 + P_2, Q \rangle = \lambda \langle P_1, Q \rangle + \langle P_2, Q \rangle$. Avec la symétrie, l'application est bilinéaire.

- Positivité : $x \mapsto P(x)^2 e^{-x}$ est positive sur $[0, +\infty[$, donc $\langle P, P \rangle \geq 0$.
- Caractère défini : si $\langle P, P \rangle = 0$, la fonction $x \mapsto P(x)^2 e^{-x}$ est continue, positive, d'intégrale nulle sur $[0, +\infty[$: elle y est nulle. Comme $e^{-x} > 0$, P s'annule sur $[0, +\infty[$; il a une infinité de racines, donc $P = 0$.

 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

16. T est un endomorphisme de E .

Si $P \in E$, alors P' et P'' sont polynomiales, donc $T(P) : x \mapsto xP''(x) - (x-1)P'(x)$ est polynomiale : $T(P) \in E$. Pour $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité de la dérivation :

$$T(\lambda P + Q)(x) = x(\lambda P'' + Q'')(x) - (x-1)(\lambda P' + Q')(x) = \lambda T(P)(x) + T(Q)(x).$$

 T est un endomorphisme de E .

17. Une dérivée.

La fonction $\psi : x \mapsto xP'(x)e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\psi'(x) = P'(x)e^{-x} + xP''(x)e^{-x} - xP'(x)e^{-x} = (xP''(x) - (x-1)P'(x))e^{-x}.$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (xP'(x)e^{-x})' = T(P)(x)e^{-x}.$

18. Expression de $\langle T(P), Q \rangle$.

Soit $A > 0$. On intègre par parties sur le segment $[0, A]$ avec $u(x) = xP'(x)e^{-x}$, $u'(x) = T(P)(x)e^{-x}$ (question 17) et $v(x) = Q(x)$, $v'(x) = Q'(x)$; u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$:

$$\int_0^A T(P)(x)Q(x)e^{-x} dx = [xP'(x)Q(x)e^{-x}]_0^A - \int_0^A xP'(x)Q'(x)e^{-x} dx.$$

Le crochet vaut $AP'(A)Q(A)e^{-A}$, qui tend vers 0 quand $A \rightarrow +\infty$ par croissances comparées ($AP'(A)Q(A)$ est polynomiale en A). Les deux intégrales convergent par la question 14 ($T(P)Q$ et $xP'Q'$ sont polynomiales). On fait tendre A vers $+\infty$:

$\forall (P, Q) \in E^2, \quad \langle T(P), Q \rangle = - \int_0^{+\infty} xP'(x)Q'(x)e^{-x} dx.$

19. Symétrie de T .

L'expression obtenue en 18 est symétrique en (P, Q) . Donc $\langle T(P), Q \rangle = \langle T(Q), P \rangle = \langle P, T(Q) \rangle$ par symétrie du produit scalaire.

$\forall (P, Q) \in E^2, \quad \langle T(P), Q \rangle = \langle P, T(Q) \rangle.$

20. Calcul de $T(L_n)$.

Par la question 13, $T(L_n)(x) = xL_n''(x) - (x-1)L_n'(x) = -nL_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T(L_n) = -nL_n.$

21. Orthogonalité.

Soient $i \neq j$ dans $\llbracket 0, N \rrbracket$. Par les questions 19 et 20 :

$$-i\langle L_i, L_j \rangle = \langle T(L_i), L_j \rangle = \langle L_i, T(L_j) \rangle = -j\langle L_i, L_j \rangle,$$

donc $(j - i)\langle L_i, L_j \rangle = 0$, et $\langle L_i, L_j \rangle = 0$ car $i \neq j$.

$$(L_0, \dots, L_N) \text{ est une famille orthogonale.}$$

22. Stabilité de E_N .

Soit $P \in E_N$. Alors $\deg P'' \leq N - 2$, donc $\deg(xP'') \leq N - 1$, et $\deg P' \leq N - 1$, donc $\deg((x - 1)P') \leq N$ (avec la convention $\deg 0 = -\infty$). Par suite $\deg T(P) \leq N$.

$$\forall P \in E_N, \quad T(P) \in E_N.$$

23. Base de E_N .

Par la question 8, chaque L_k ($0 \leq k \leq N$) est de degré $k \leq N$, donc appartient à E_N et est non nul. Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. La famille $(L_0, \dots, L_N)$ est donc libre, de cardinal $N + 1 = \dim E_N$.

$$(L_0, \dots, L_N) \text{ est une base (orthogonale) de } E_N.$$

24. Matrice de T_N .

Par la question 20, $T_N(L_k) = -kL_k$ pour $0 \leq k \leq N$.

$$\text{Mat}_{(L_0, \dots, L_N)}(T_N) = \text{diag}(0, -1, -2, \dots, -N).$$

25. Diagonalisabilité et bijectivité.

La matrice de T_N dans la base $(L_0, \dots, L_N)$ est diagonale : T_N est diagonalisable (c'est aussi une conséquence du théorème spectral, T_N étant symétrique par la question 19). Par ailleurs $T_N(L_0) = 0$ avec $L_0 = 1 \neq 0$: $\ker T_N \neq \{0\}$, donc T_N n'est pas injectif.

$$T_N \text{ est diagonalisable, de spectre } \{0, -1, \dots, -N\}, \text{ et n'est pas bijectif.}$$

Partie IV – Nature d'une série de maximums**Partie IV – Série de maximums**

$$g_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!} \text{ sur } [0, +\infty[, \quad M_n = \max g_n, \quad \mu_n = \sqrt{n} M_n, \quad a_n = \ln \mu_{n+1} - \ln \mu_n.$$

Corrigé – Partie IV.

26. Maximum de g_n .

g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et

$$g'_n(x) = \frac{nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x}}{n!} = \frac{x^{n-1}(n-x)e^{-x}}{n!}.$$

Ainsi $g'_n \geq 0$ sur $[0, n]$ et $g'_n \leq 0$ sur $[n, +\infty[$: g_n est croissante sur $[0, n]$ et décroissante sur $[n, +\infty[$. Elle admet donc un maximum, atteint en n .

$$M_n = g_n(n) = \frac{n^n e^{-n}}{n!}.$$

27. Développement de a_n .

On a $\ln \mu_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n - \ln(n!)$. Comme $\ln((n+1)!) = \ln(n+1) + \ln(n!)$:

$$a_n = \left(n + \frac{3}{2}\right) \ln(n+1) - (n+1) - \ln(n+1) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1.$$

Par le développement limité $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$ quand $u \rightarrow 0$, avec $u = \frac{1}{n} \rightarrow 0$:

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En sommant, $a_n = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

$$a_n = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow +\infty), \quad c = \frac{1}{12}.$$

28. Nature de $\sum a_n$.

Par la question 27, $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$; en particulier $a_n > 0$ à partir d'un certain rang. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge ($2 > 1$). Par le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs :

$$\sum_{n \geq 1} a_n \text{ converge.}$$

29. Convergence de (μ_n) .

Par télescopage, pour $n \geq 2$, $\sum_{k=1}^{n-1} a_k = \ln \mu_n - \ln \mu_1$. Par la question 28, cette somme partielle converge vers $\sigma = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$. Donc $\ln \mu_n \rightarrow \ln \mu_1 + \sigma$, puis, par continuité de $\exp$, $\mu_n \rightarrow \lambda = e^{\ln \mu_1 + \sigma}$.

$$(\mu_n)_{n \geq 1} \text{ converge vers } \lambda = \mu_1 e^{\sigma} > 0.$$

30. Nature de $\sum M_n$.

On a $M_n = \frac{\mu_n}{\sqrt{n}} > 0$ et, comme $\lambda > 0$, $M_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda}{\sqrt{n}}$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge ($\frac{1}{2} \leq 1$). Par le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs :

$$\sum_{n \geq 1} M_n \text{ diverge.}$$

Partie V – Extremum local d’une fonction de deux variables

Partie V – Extremum local

$$f(x) = xe^{-x} \text{ sur }]0, +\infty[, F(x, y) = f(x) + f(y) - f(x+y) \text{ sur }]0, +\infty[^2.$$

Corrigé – Partie V.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, avec

$$f'(x) = (1-x)e^{-x}, \quad f''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}.$$

31. Classe $\mathcal{C}^2$ et dérivées partielles.

Les fonctions $(x, y) \mapsto f(x)$ et $(x, y) \mapsto f(y)$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$. La fonction $(x, y) \mapsto f(x+y)$ est la composée de la fonction polynomiale $(x, y) \mapsto x+y$, à valeurs dans $]0, +\infty[$, par f , de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$: elle est de classe $\mathcal{C}^2$. Par somme, F est de classe $\mathcal{C}^2$. À y fixé, la dérivée de $x \mapsto f(x+y)$ est $x \mapsto f'(x+y)$, et de même à x fixé.

$$F \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0, +\infty[^2.$$

$$\partial_1 F(x, y) = f'(x) - f'(x+y), \quad \partial_2 F(x, y) = f'(y) - f'(x+y).$$

32. L’équation $f'(x) = f'(a)$.

On a $f'' < 0$ sur $]0, 2[$ et $f'' > 0$ sur $]2, +\infty[$: f' est strictement décroissante sur $]0, 2[$ et strictement croissante sur $]2, +\infty[$. Elle est donc injective sur chacun de ces deux intervalles, et l’équation $f'(x) = f'(a)$ admet au plus une solution dans $]0, 2[$ et au plus une dans $]2, +\infty[$. Elle a donc au plus deux solutions dans $]0, +\infty[$, dont a .

$$\text{L'équation } f'(x) = f'(a) \text{ admet au plus une solution distincte de } a.$$

33. Points critiques.

(x, y) est critique si et seulement si $f'(x) = f'(x+y)$ et $f'(y) = f'(x+y)$.

Supposons (x, y) critique et posons $a = x+y$. Alors x et y sont solutions de $f'(t) = f'(a)$, et toutes deux distinctes de a (car $x > 0$ et $y > 0$). Par la question 32, $x = y$, puis $f'(x) = f'(2x)$. Réciproquement, si $x = y$ et $f'(x) = f'(2x)$, alors $\partial_1 F(x, x) = \partial_2 F(x, x) = f'(x) - f'(2x) = 0$.

$$(x, y) \text{ critique} \iff x = y \text{ et } f'(x) = f'(2x).$$

34. Unicité du point critique et encadrement.

Pour $x > 0$, en multipliant par $e^{2x} > 0$:

$$f'(x) = f'(2x) \iff (1-x)e^{-x} = (1-2x)e^{-2x} \iff \varphi(x) = 0,$$

où $\varphi(x) = (1-x)e^x + 2x - 1$. φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, +\infty[$, avec $\varphi'(x) = -xe^x + 2$ et $\varphi''(x) = -(x+1)e^x < 0$.

- φ' est continue, strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, avec $\varphi'(0) = 2 > 0$ et $\varphi'(x) \rightarrow -\infty$. Par le théorème de la bijection, il existe un unique $\beta > 0$ tel que $\varphi'(\beta) = 0$; $\varphi' > 0$ sur $[0, \beta[$ et $\varphi' < 0$ sur $]\beta, +\infty[$.

- φ est strictement croissante sur $[0, \beta]$ et $\varphi(0) = 0 : \varphi > 0$ sur $]0, \beta]$.
- Sur $[\beta, +\infty[$, φ est continue et strictement décroissante, $\varphi(\beta) > 0$, et $\varphi(x) = e^x(1 - x + (2x - 1)e^{-x}) \rightarrow -\infty$ par croissances comparées. Par le théorème de la bijection, φ s'annule une seule fois sur $[\beta, +\infty[$, en un point α , avec $\varphi > 0$ sur $[\beta, \alpha[$ et $\varphi < 0$ sur $]\alpha, +\infty[$.

Ainsi α est l'unique zéro de φ sur $]0, +\infty[$, avec $\varphi > 0$ sur $]0, \alpha[$ et $\varphi < 0$ sur $]\alpha, +\infty[$. Or $\varphi(1) = 0 + 2 - 1 = 1 > 0$ et $\varphi(2) = 3 - e^2 < 0$ (car $e^2 > 4$), donc $1 < \alpha < 2$.

F admet un unique point critique (α, α) , et $1 < \alpha < 2$.

35. Signes de $f''(\alpha)$ et $f''(2\alpha)$.

On a $f''(\alpha) = (\alpha - 2)e^{-\alpha} < 0$ car $\alpha < 2$, et $f''(2\alpha) = (2\alpha - 2)e^{-2\alpha} > 0$ car $\alpha > 1$.

$$f''(\alpha) < 0 \quad \text{et} \quad f''(2\alpha) > 0.$$

36. Nature de l'extremum.

F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]0, +\infty[^2$: un extremum local ne peut être atteint qu'en un point critique, donc seulement en (α, α) . Les dérivées partielles secondes sont

$$\partial_{1,1}^2 F(x, y) = f''(x) - f''(x + y), \quad \partial_{2,2}^2 F(x, y) = f''(y) - f''(x + y),$$

$$\partial_{1,2}^2 F(x, y) = \partial_{2,1}^2 F(x, y) = -f''(x + y).$$

En (α, α) , avec $p = f''(\alpha) - f''(2\alpha)$ et $q = -f''(2\alpha)$, la hessienne est $H = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$. On a

$$H \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (p + q) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (p - q) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

et ces deux vecteurs forment une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Les valeurs propres de H sont donc

$$p + q = f''(\alpha) - 2f''(2\alpha) < 0 \quad \text{et} \quad p - q = f''(\alpha) < 0,$$

par la question 35. Les deux valeurs propres de la hessienne au point critique sont strictement négatives : F admet un maximum local en (α, α) .

F admet un unique extremum local : un maximum local en (α, α) .

$$F(\alpha, \alpha) = 2\alpha e^{-\alpha} - 2\alpha e^{-2\alpha}.$$