

ESSEC

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2011

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Partie I – Préliminaires

Partie I – Centre et commutant

E de dimension finie $n \geq 1$, $C(U) = \{v \in L(E) \mid \forall u \in U, u \circ v = v \circ u\}$, $\mathbb{R}[u] = \{P(u), P \in \mathbb{R}[X]\}$.

Corrigé – Partie I.

1. $C(U)$ est un sous-espace vectoriel de dimension ≥ 1 .

$C(U) \subset L(E)$ et $0 \in C(U)$, car $u \circ 0 = 0 = 0 \circ u$ pour tout $u \in U$. Soient $v, w \in C(U)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $u \in U$, par linéarité de u ,

$$u \circ (\lambda v + w) = \lambda u \circ v + u \circ w = \lambda v \circ u + w \circ u = (\lambda v + w) \circ u,$$

donc $\lambda v + w \in C(U)$. Enfin, $\text{id}_E \in C(U)$, car $u \circ \text{id}_E = u = \text{id}_E \circ u$, et $\text{id}_E \neq 0$ puisque $E \neq \{0\}$. Donc $C(U)$ contient la famille libre (id_E) .

$$C(U) \text{ est un sous-espace vectoriel de } L(E) \text{ et } \dim C(U) \geq 1.$$

2. $\mathbb{R}[u] \subset C(u)$.

Par récurrence immédiate, $u \circ u^k = u^{k+1} = u^k \circ u$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (avec $u^0 = \text{id}_E$). Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$. Par linéarité de u ,

$$u \circ P(u) = \sum_{k=0}^d a_k u \circ u^k = \sum_{k=0}^d a_k u^k \circ u = P(u) \circ u.$$

$$\mathbb{R}[u] \subset C(u).$$

3. Stabilité des espaces propres.

Soit $x \in E_\lambda(u)$, c'est-à-dire $u(x) = \lambda x$. Comme $u \circ v = v \circ u$ et v est linéaire :

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x),$$

donc $v(x) \in E_\lambda(u)$.

$$v(E_\lambda(u)) \subset E_\lambda(u).$$

Partie II – Étude d'un exemple

Partie II – Un endomorphisme non diagonalisable

B : suites de A telles que $2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n = 0$; $\varphi(x) = \frac{1}{2-x}$, $\psi(x) = \frac{1}{1+x}$, $\delta(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$; u décale les coefficients.

Corrigé – Partie II.

Pour $f \in H$, on appelle *suite des coefficients de f* l'unique suite $(a_n)_{n \geq 0} \in A$ telle que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-1, 1[$ (existence et unicité admises). Rappelons qu'une série absolument convergente est convergente : pour $(a_n) \in A$ et $x \in]-1, 1[$, la série $\sum a_n x^n$ converge.

4. Quelques propriétés de A .

- a) Pour $x \in]-1, 1[$, $\sum |x^n| = \sum |x|^n$ est une série géométrique de raison $|x| \in [0, 1[$, donc convergente.

$$(1)_{n \geq 0} \in A.$$

- b) Comme $a_n = o(n^s)$, il existe $N \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|a_n| \leq n^s$. Soit $x \in]-1, 1[$. Si $x = 0$, la série $\sum |a_n x^n|$ n'a qu'un terme non nul et converge. Si $x \neq 0$, alors $0 < |x| < 1$ et, pour $n \geq N$,

$$0 \leq |a_n x^n| \leq n^s |x|^n.$$

Par croissances comparées, $n^2 \cdot n^s |x|^n = n^{s+2} |x|^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $n^s |x|^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum n^s |x|^n$ converge, puis $\sum |a_n x^n|$ converge.

$$a_n = o(n^s) \implies (a_n)_{n \geq 0} \in A.$$

- c) On a $\alpha_n = 2^{-n} \rightarrow 0$, soit $\alpha_n = o(n^0)$. Ensuite, $\frac{\beta_n}{n} = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$, soit $\beta_n = o(n^1)$. Enfin, $\frac{\gamma_n}{n^2} = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$, soit $\gamma_n = o(n^2)$. Par b) :

$$(\alpha_n)_{n \geq 0}, (\beta_n)_{n \geq 0}, (\gamma_n)_{n \geq 0} \in A.$$

5. Premières propriétés de H .

- a) A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La suite nulle est dans A . Si $(a_n), (c_n) \in A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors pour $x \in]-1, 1[$,

$$0 \leq |(\lambda a_n + c_n)x^n| \leq |\lambda| |a_n x^n| + |c_n x^n|,$$

terme général d'une série convergente ; par comparaison, $(\lambda a_n + c_n) \in A$.

H . La fonction nulle est dans H (coefficients nuls). Si $f, g \in H$ ont pour suites de coefficients (a_n) et (c_n) , et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors, par linéarité de la somme des séries convergentes, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$(\lambda f + g)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + c_n) x^n, \quad \text{avec } (\lambda a_n + c_n) \in A.$$

Donc $\lambda f + g \in H$.

H est un sous-espace vectoriel de l'espace des applications de $] -1, 1[$ dans $\mathbb{R}$.

Au passage, la suite des coefficients de $\lambda f + g$ est $(\lambda a_n + c_n)$, par unicité.

b) Soit $x \in] -1, 1[$. Comme $|\frac{x}{2}| < 1$, la série géométrique donne

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{2} x^n.$$

Comme $| -x | < 1$, $\psi(x) = \frac{1}{1 - (-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n x^n$. Enfin, par la série géométrique dérivée, $\sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$ pour $|t| < 1$; avec $t = -x$:

$$\delta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(-1)^{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\gamma_n + \beta_n) x^n.$$

Par 4c) et parce que A est un espace vectoriel, $(\frac{\alpha_n}{2})$, (β_n) et $(\gamma_n + \beta_n)$ sont dans A .

$\varphi, \psi, \delta \in H$, de coefficients respectifs $\frac{1}{2^{n+1}}$, $(-1)^n$, $(n+1)(-1)^n$.

6. Premières propriétés de E .

a) Soit $a_n = a_0 q^n$ une suite géométrique (avec la convention $q^0 = 1$). Pour tout n ,

$$2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n = a_0 q^n (2q^3 + 3q^2 - 1) = a_0 q^n (2q - 1)(q + 1)^2.$$

Si $a_0 = 0$, la suite est nulle, et elle est dans B . Si $a_0 \neq 0$, la relation pour $n = 0$ impose $(2q - 1)(q + 1)^2 = 0$, soit $q = \frac{1}{2}$ ou $q = -1$. Réciproquement, pour ces valeurs, la relation est vraie pour tout n , et $(a_0 2^{-n}) = a_0(\alpha_n)$ et $(a_0(-1)^n) = a_0(\beta_n)$ sont dans A par 4c).

Les suites géométriques de B sont les $(a_0 2^{-n})_{n \geq 0}$ et les $(a_0(-1)^n)_{n \geq 0}$, $a_0 \in \mathbb{R}$.

b) $(\gamma_n) \in A$ par 4c), et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2\gamma_{n+3} + 3\gamma_{n+2} - \gamma_n = (-1)^n (-2(n+3) + 3(n+2) - n) = (-1)^n \cdot 0 = 0.$$

$(\gamma_n)_{n \geq 0} \in B$.

c) B est un sous-espace vectoriel de A : la suite nulle est dans B , et si $(a_n), (c_n) \in B$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(\lambda a_n + c_n) \in A$ et

$$2(\lambda a_{n+3} + c_{n+3}) + 3(\lambda a_{n+2} + c_{n+2}) - (\lambda a_n + c_n) = \lambda \cdot 0 + 0 = 0.$$

Comme en 5a), $0 \in E$ et, si $f, g \in E$ ont pour coefficients $(a_n), (c_n) \in B$, alors $\lambda f + g$ a pour coefficients $(\lambda a_n + c_n) \in B$, donc $\lambda f + g \in E$. Et $E \subset H$ car $B \subset A$. Enfin, par 5b), les coefficients de φ, ψ, δ sont $\frac{1}{2}(\alpha_n)$, (β_n) et $(\gamma_n) + (\beta_n)$, qui sont dans B par a), b) et parce que B est un espace vectoriel.

E est un sous-espace vectoriel de H contenant φ, ψ, δ .

7. Caractérisation des éléments de E .

- a) Soit $x \in]-1, 1[$. Les séries $\sum a_n x^{n+3}$, $\sum a_n x^{n+1}$, $\sum a_n x^n$ convergent, et, par linéarité et décalage d'indice,

$$f(x)(x^3 - 3x - 2) = \sum_{m=3}^{+\infty} a_{m-3} x^m - 3 \sum_{m=1}^{+\infty} a_{m-1} x^m - 2 \sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m.$$

On regroupe : le coefficient de x^0 est $-2a_0$, celui de x^1 est $-3a_0 - 2a_1$, celui de x^2 est $-3a_1 - 2a_2$, et pour $m \geq 3$, celui de x^m est $a_{m-3} - 3a_{m-1} - 2a_m = -(2a_m + 3a_{m-1} - a_{m-3}) = 0$ (relation de B au rang $n = m - 3$). Donc

$$\begin{aligned} f(x)(x^3 - 3x - 2) &= -2a_0 - (3a_0 + 2a_1)x - (3a_1 + 2a_2)x^2 \\ &= -a_0(2 + 3x) - a_1(2x + 3x^2) - 2a_2x^2. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x)(x^3 - 3x - 2) + a_0(2 + 3x) + a_1(2x + 3x^2) + 2a_2x^2 = 0.}$$

- b) On a $x^3 - 3x - 2 = (x + 1)^2(x - 2)$, qui ne s'annule qu'en -1 et 2 , donc pas sur $] -1, 1[$. On pose $Q(x) = -a_0(2 + 3x) - a_1(2x + 3x^2) - 2a_2x^2$, de degré ≤ 2 . Par a) :

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{Q(x)}{x^3 - 3x - 2}}$$

$$\boxed{Q(x) = -2a_0 - (3a_0 + 2a_1)x - (3a_1 + 2a_2)x^2.}$$

- c) Pour $x \in]-1, 1[$, on a

$$\varphi(x) = \frac{-(x+1)^2}{x^3 - 3x - 2}, \quad \psi(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x^3 - 3x - 2}, \quad \delta(x) = \frac{x-2}{x^3 - 3x - 2}.$$

La famille $((X+1)^2, (X+1)(X-2), X-2)$ est libre dans $\mathbb{R}_2[X]$: si $a(X+1)^2 + b(X+1)(X-2) + c(X-2) = 0$, l'évaluation en 2 donne $9a = 0$, puis l'évaluation en -1 donne $-3c = 0$, d'où $b(X+1)(X-2) = 0$ et $b = 0$. C'est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$, qui est de dimension 3 : c'est une base. Il existe donc des réels c_1, c_2, c_3 tels que $Q = c_1(X+1)^2 + c_2(X+1)(X-2) + c_3(X-2)$, et alors, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f(x) = \frac{c_1(x+1)^2 + c_2(x+1)(x-2) + c_3(x-2)}{x^3 - 3x - 2} = -c_1\varphi(x) + c_2\psi(x) + c_3\delta(x).$$

$$\boxed{f \in \text{Vect}(\varphi, \psi, \delta).}$$

- d) Par c), $E \subset \text{Vect}(\varphi, \psi, \delta)$, et par 6c), $\text{Vect}(\varphi, \psi, \delta) \subset E$. Si $a\varphi + b\psi + c\delta = 0$, on multiplie par $x^3 - 3x - 2$: le polynôme $-a(X+1)^2 + b(X+1)(X-2) + c(X-2)$ s'annule sur $] -1, 1[$, donc en une infinité de points : il est nul. Par la liberté établie en c), $a = b = c = 0$.

$$\boxed{E = \text{Vect}(\varphi, \psi, \delta), \quad \mathcal{C} = (\varphi, \psi, \delta) \text{ est une base de } E, \quad \dim E = 3.}$$

8. L'endomorphisme u .

- a) Soit $x \in]-1, 1[$. Si $x = 0$, $\sum |b_n x^n|$ converge trivialement. Si $x \neq 0$, $\sum_{n \geq 0} |a_{n+1} x^{n+1}|$ converge (série extraite de $\sum |a_n x^n|$ privée de son premier terme), donc $\sum |b_n x^n| =$

$\frac{1}{|x|} \sum |a_{n+1}x^{n+1}|$ converge. Ainsi $(b_n) \in A$. Enfin, par la relation de B au rang $n+1$

$$2b_{n+3} + 3b_{n+2} - b_n = 2a_{n+4} + 3a_{n+3} - a_{n+1} = 0.$$

$$(b_n)_{n \geq 0} = (a_{n+1})_{n \geq 0} \in B.$$

- b)** Comme la suite des coefficients de f est unique, $u(f)$ ne dépend que de f , et $u(f) \in E$ par a). Si $f, g \in E$ ont pour coefficients $(a_n), (c_n)$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + g$ a pour coefficients $(\lambda a_n + c_n)$ (5a), donc, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$[u(\lambda f + g)](x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_{n+1} + c_{n+1})x^n = \lambda[u(f)](x) + [u(g)](x).$$

$$u \in L(E).$$

- c)** Par a), $u(f)$ a pour suite de coefficients (a_{n+1}) . Par récurrence sur k , $u^k(f)$ a pour suite de coefficients $(a_{n+k})_{n \geq 0}$: c'est vrai pour $k=0$, et si c'est vrai au rang k , $u^{k+1}(f) = u(u^k(f))$ a pour coefficients $(a_{(n+1)+k})_n$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1, 1[, \quad [u^k(f)](x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k}x^n.$$

Par linéarité, $(2u^3 + 3u^2 - \text{id}_E)(f)$ a pour coefficients $(2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n)_n$, qui est la suite nulle : c'est la fonction nulle, pour tout $f \in E$.

$$\pi = 2X^3 + 3X^2 - 1 = (2X - 1)(X + 1)^2 \text{ vérifie } \pi(u) = 0.$$

- d)** Par 5b) et c) : $u^k(\varphi)$ a pour coefficients $\frac{1}{2^{n+k+1}} = 2^{-k} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$, donc $u^k(\varphi) = 2^{-k}\varphi$; $u^k(\psi)$ a pour coefficients $(-1)^{n+k}$, donc $u^k(\psi) = (-1)^k\psi$; enfin $u^k(\delta)$ a pour coefficients

$$(n+k+1)(-1)^{n+k} = (-1)^k(n+1)(-1)^n + k(-1)^k(-1)^n,$$

donc $u^k(\delta) = k(-1)^k\psi + (-1)^k\delta$. Pour $k=1$, $u(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi$, $u(\psi) = -\psi$, $u(\delta) = -\psi - \delta$, et T^k est la matrice de u^k dans $\mathcal{C}$:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad T^k = \begin{pmatrix} 2^{-k} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & k(-1)^k \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix}.$$

9. Éléments propres de u .

- a)** T est triangulaire supérieure : ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, $\frac{1}{2}$ et -1 (ce sont bien des racines de π). On résout, pour $X = (x, y, z)$ coordonnées dans $\mathcal{C}$:

- $(T - \frac{1}{2}I_3)X = 0 \iff -\frac{3}{2}y - z = 0 \text{ et } -\frac{3}{2}z = 0 \iff y = z = 0$;
- $(T + I_3)X = 0 \iff \frac{3}{2}x = 0 \text{ et } -z = 0 \iff x = z = 0$.

$$\text{Sp}(u) = \left\{ \frac{1}{2}, -1 \right\}, \quad E_{1/2}(u) = \text{Vect}(\varphi), \quad E_{-1}(u) = \text{Vect}(\psi).$$

- b) La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $1 + 1 = 2 < 3 = \dim E$.

u n'est pas diagonalisable.

10. Centre de u .

- a) Par la question 3, $E_{1/2}(u) = \text{Vect}(\varphi)$ et $E_{-1}(u) = \text{Vect}(\psi)$ sont stables par v . Donc $v(\varphi) \in \text{Vect}(\varphi)$ et $v(\psi) \in \text{Vect}(\psi)$.

$$\boxed{\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad v(\varphi) = \lambda\varphi, \quad v(\psi) = \mu\psi.}$$

- b) On écrit $v(\delta) = a\varphi + \eta\psi + \omega\delta$ dans la base $\mathcal{C}$. Comme $u \circ v = v \circ u$ et $u(\delta) = -\psi - \delta$:

$$u(v(\delta)) = v(u(\delta)) = -v(\psi) - v(\delta) = -\mu\psi - v(\delta), \quad \text{donc} \quad (u + \text{id}_E)(v(\delta)) = -\mu\psi.$$

Or $(u + \text{id}_E)(\varphi) = \frac{3}{2}\varphi$, $(u + \text{id}_E)(\psi) = 0$ et $(u + \text{id}_E)(\delta) = -\psi$, d'où

$$(u + \text{id}_E)(v(\delta)) = \frac{3}{2}a\varphi - \omega\psi = -\mu\psi.$$

Par unicité des coordonnées dans $\mathcal{C}$, $a = 0$.

$$\boxed{\exists(\eta, \omega) \in \mathbb{R}^2, \quad v(\delta) = \eta\psi + \omega\delta.}$$

- c) L'égalité précédente donne aussi, en identifiant les coordonnées sur ψ , $-\omega = -\mu$.

$$\boxed{\mu = \omega.}$$

- d) On note $V = M_{\mathcal{C}}(v)$. On calcule

$$TV = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & -\eta - \mu \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}, \quad VT = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & -\mu - \eta \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}.$$

Donc $TV = VT$, c'est-à-dire $u \circ v = v \circ u$.

$$\boxed{v \in C(u).}$$

- e) Par a), b), c) et d), $v \in C(u)$ si et seulement si $M_{\mathcal{C}}(v) = \lambda E_{1,1} + \mu(E_{2,2} + E_{3,3}) + \eta E_{2,3}$, avec $(\lambda, \mu, \eta) \in \mathbb{R}^3$ ($E_{i,j}$ matrices élémentaires). Par l'isomorphisme $v \mapsto M_{\mathcal{C}}(v)$ de $L(E)$ sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $C(u)$ est isomorphe à $\text{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2} + E_{3,3}, E_{2,3})$. Cette famille est libre, car ses éléments ont des coefficients non nuls à des positions deux à deux disjointes.

$$\boxed{\dim C(u) = 3.}$$

- f) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a\text{id}_E + bu + cu^2 = 0$, soit $aI_3 + bT + cT^2 = 0$. Par 8d), on lit les coefficients $(1, 1)$, $(2, 2)$ et $(2, 3)$:

$$a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} = 0, \quad a - b + c = 0, \quad -b + 2c = 0.$$

Donc $b = 2c$, puis $a = b - c = c$, puis $c + c + \frac{c}{4} = \frac{9}{4}c = 0$. Ainsi $a = b = c = 0$.

$$\boxed{(\text{id}_E, u, u^2) \text{ est libre dans } L(E).}$$

- g) $\mathbb{R}[u]$ est un sous-espace vectoriel de $L(E)$ (image de l'application linéaire $P \mapsto P(u)$), contenu dans $C(u)$ par la question 2, et il contient la famille libre (id_E, u, u^2) . Donc $3 \leq \dim \mathbb{R}[u] \leq \dim C(u) = 3$, et l'inclusion est une égalité.

$$\boxed{C(u) = \mathbb{R}[u] = \text{Vect}(\text{id}_E, u, u^2).}$$

Partie III – Centre de $L(E)$

Partie III – Endomorphismes commutant avec tous les autres

E de dimension finie $n \geq 1$.

Corrigé – Partie III.

11. Tout vecteur non nul est propre.

Pour tout $x \neq 0$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$ (le réel λ_x est unique, car $x \neq 0$). Soient x, y non nuls.

- Si (x, y) est libre, alors $x + y \neq 0$ et $u(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y) = \lambda_x x + \lambda_y y$. Par liberté, $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.
- Si (x, y) est liée, $y = \alpha x$ avec $\alpha \neq 0$, et $u(y) = \alpha \lambda_x x = \lambda_x y$, donc $\lambda_y = \lambda_x$.

Ainsi $\lambda_x = \lambda$ ne dépend pas de x , et $u(x) = \lambda x$ pour tout $x \in E$ (y compris $x = 0$).

$$u = \lambda \text{id}_E \text{ est une homothétie.}$$

12. Centre de l'ensemble des projecteurs.

Soit $e \neq 0$. $F = \text{Vect}(e)$ admet un supplémentaire G (on complète (e) en une base de E par le théorème de la base incomplète). Soit p la projection sur F parallèlement à G : $p \in U$, donc $v \circ p = p \circ v$. Comme $p(e) = e$,

$$v(e) = v(p(e)) = p(v(e)) \in \text{Im } p = F = \text{Vect}(e).$$

Donc $v(e) = \lambda_e e$: tout vecteur non nul de E est vecteur propre de v , et, par la question 11, v est une homothétie. Réciproquement, toute homothétie λid_E commute avec tout endomorphisme, en particulier avec les projecteurs.

$$C(U) = \{\lambda \text{id}_E, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

13. Centre de $L(E)$.

Comme $U \subset L(E)$, un endomorphisme qui commute avec tous les éléments de $L(E)$ commute avec tous les projecteurs : $C(L(E)) \subset C(U)$, ensemble des homothéties. Réciproquement, les homothéties commutent avec tout endomorphisme.

$$C(L(E)) = \{\lambda \text{id}_E, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Partie IV – Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Partie IV – Dimension du commutant

$E = \mathbb{R}^n$, u diagonalisable de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, d'espaces propres $E_1, \dots, E_p$, $r_i = \dim E_i$.

Corrigé – Partie IV.

Comme u est diagonalisable, $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$, donc $\sum_{i=1}^p r_i = n$, avec $r_i \geq 1$ pour tout i . En particulier $p \leq n$.

14. Stabilité des E_i .

$E_i = E_{\lambda_i}(u)$ est l'espace propre associé à la valeur propre λ_i , donc, par la question 3 :

$$\boxed{\forall v \in C(u), \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad v(E_i) \subset E_i.}$$

15. Réciproque.

Soit $x \in E$, que l'on décompose en $x = \sum_{i=1}^p x_i$ avec $x_i \in E_i$. Comme $v(x_i) \in E_i$, on a $u(v(x_i)) = \lambda_i v(x_i)$, donc, par linéarité :

$$u(v(x)) = \sum_{i=1}^p \lambda_i v(x_i) = v\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) = v(u(x)).$$

$$\boxed{v \in C(u).}$$

16. Allure des matrices.

Soit $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$, obtenue en concaténant des bases $\mathcal{B}_i$ des E_i . Pour $v \in L(E)$, E_i est stable par v si et seulement si les images des vecteurs de $\mathcal{B}_i$ sont combinaisons linéaires des seuls vecteurs de $\mathcal{B}_i$, c'est-à-dire si et seulement si, dans les colonnes correspondant à $\mathcal{B}_i$, les seuls coefficients éventuellement non nuls sont dans les lignes correspondant à $\mathcal{B}_i$. Par 14 et 15 :

$$\boxed{v \in C(u) \iff M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} V_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & V_p \end{pmatrix}, \quad V_i \in \mathcal{M}_{r_i}(\mathbb{R}).}$$

17. Dimension de $C(u)$.

L'application $v \mapsto M_{\mathcal{B}}(v)$ est un isomorphisme de $L(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par 16, elle envoie $C(u)$ sur l'ensemble $\mathcal{D}$ des matrices diagonales par blocs de tailles $r_1, \dots, r_p$. $\mathcal{D}$ est le sous-espace engendré par les matrices élémentaires $E_{k,l}$ telles que (k,l) soit dans l'un des blocs diagonaux. Cette famille est libre ; elle compte $r_1^2 + \cdots + r_p^2$ éléments.

$$\boxed{\dim C(u) = \sum_{i=1}^p r_i^2.}$$

18. Minoration et cas d'égalité.

Les r_i sont des entiers ≥ 1 , donc $r_i^2 \geq r_i$, et $\sum r_i^2 \geq \sum r_i = n$. Il y a égalité si et seulement si $r_i^2 = r_i$ pour tout i , soit $r_i = 1$ pour tout i . Si tous les r_i valent 1, alors $n = \sum r_i = p$. Réciproquement, si $p = n$, n entiers ≥ 1 de somme n valent tous 1. Enfin, $p = n$ signifie que u admet n valeurs propres distinctes.

$$\boxed{\dim C(u) \geq n, \quad \text{et} \quad \dim C(u) = n \iff u \text{ admet } n \text{ valeurs propres distinctes.}}$$

19. Matrice de u et de $P(u)$.

Les vecteurs de $\mathcal{B}_i$ sont propres pour λ_i , donc $M = \text{diag}(\lambda_1 I_{r_1}, \dots, \lambda_p I_{r_p})$, matrice diagonale. Le produit de matrices diagonales se fait terme à terme, d'où, par récurrence (avec $M^0 = I_n$), puis par linéarité :

$$M^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k I_{r_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p^k I_{r_p} \end{pmatrix}, \quad P(M) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) I_{r_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda_p) I_{r_p} \end{pmatrix}.$$

20. Valeur de $\pi(u)$.

La matrice de $\pi(u)$ dans $\mathcal{B}$ est $\pi(M)$, et $\pi(\lambda_i) = 0$ pour tout i . Par 19, $\pi(M) = 0$.

$$\pi(u) = 0.$$

21. Polynômes annulateurs.

$P(u) = 0 \iff P(M) = 0$, et, par 19, comme chaque bloc $P(\lambda_i) I_{r_i}$ est de taille $r_i \geq 1$, $P(M) = 0 \iff P(\lambda_i) = 0$ pour tout i .

$$P(u) = 0 \iff \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, P(\lambda_i) = 0.$$

22. Liberté de $(\text{id}_E, u, \dots, u^{p-1})$.

Soient $c_0, \dots, c_{p-1}$ des réels tels que $\sum_{k=0}^{p-1} c_k u^k = 0$. Le polynôme $P = \sum_{k=0}^{p-1} c_k X^k$ vérifie $P(u) = 0$, donc, par 21, il admet les p racines distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Comme il est de degré $\leq p-1$, il est nul : $c_0 = \dots = c_{p-1} = 0$.

$$(\text{id}_E, u, \dots, u^{p-1}) \text{ est libre dans } L(E).$$

23. Dimension de $\mathbb{R}[u]$.

On note $W = \text{Vect}(\text{id}_E, u, \dots, u^{p-1})$. Le polynôme π est unitaire de degré p : $\pi = X^p + \sum_{j=0}^{p-1} b_j X^j$. Par 20, $u^p = -\sum_{j=0}^{p-1} b_j u^j \in W$. On montre par récurrence que $u^k \in W$ pour tout k . C'est clair pour $k \leq p-1$. Si $u^k = \sum_{j=0}^{p-1} c_j u^j \in W$, alors $u^{k+1} = \sum_{j=0}^{p-2} c_j u^{j+1} + c_{p-1} u^p \in W$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k \in \text{Vect}(\text{id}_E, u, \dots, u^{p-1}).$$

Par linéarité, $P(u) \in W$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, donc $\mathbb{R}[u] \subset W$. L'inclusion $W \subset \mathbb{R}[u]$ est évidente. Ainsi $\mathbb{R}[u] = W$, et, par 22, $(\text{id}_E, u, \dots, u^{p-1})$ en est une base.

$$\dim \mathbb{R}[u] = p.$$

24. Cas d'égalité $C(u) = \mathbb{R}[u]$.

Par la question 2, $\mathbb{R}[u] \subset C(u)$, donc $C(u) = \mathbb{R}[u] \iff \dim C(u) = \dim \mathbb{R}[u]$, soit $\sum r_i^2 = p$. Or, par 18, $\sum r_i^2 \geq n \geq p$.

- Si $\sum r_i^2 = p$, alors $n = p$: u a n valeurs propres distinctes.
- Si u a n valeurs propres distinctes, alors $p = n$ et, par 18, $\sum r_i^2 = n = p$.

$$C(u) = \mathbb{R}[u] \iff u \text{ admet } n \text{ valeurs propres distinctes.}$$

Partie V – Centre du commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Partie V – Le bicommutant

Mêmes hypothèses ; $C_2(u) = C(C(u))$.

Corrigé – Partie V.

25. $C_2(u) \subset C(u)$.

u commute avec lui-même, donc $u \in C(u)$. Si $v \in C_2(u)$, v commute avec tous les éléments de $C(u)$, en particulier avec u .

$$C_2(u) \subset C(u).$$

26. $\mathbb{R}[u] \subset C_2(u)$.

Soient $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ et $w \in C(u)$. Par récurrence, $w \circ u^k = u^k \circ w$ pour tout k : c'est vrai pour $k = 0$, et si c'est vrai au rang k , alors $w \circ u^{k+1} = (w \circ u^k) \circ u = u^k \circ w \circ u = u^k \circ u \circ w = u^{k+1} \circ w$. Par linéarité de w , $w \circ P(u) = \sum a_k w \circ u^k = \sum a_k u^k \circ w = P(u) \circ w$. Donc $P(u)$ commute avec tout élément de $C(u)$.

$$\mathbb{R}[u] \subset C_2(u).$$

27. Restriction aux espaces propres.

Par 25, $v \in C(u)$, donc, par 14, E_i est stable par v , et v_i est bien un endomorphisme de E_i . Soit $w \in L(E_i)$. On définit $\tilde{w} \in L(E)$ par $\tilde{w}(x) = w(x_i)$, où $x = \sum_{j=1}^p x_j$ est la décomposition de x dans $E = \bigoplus_j E_j$. $\tilde{w}$ est linéaire, car la décomposition l'est. On a $\tilde{w}(E_j) = \{0\}$ pour $j \neq i$ et $\tilde{w}(E_i) \subset E_i$: chaque E_j est stable par $\tilde{w}$, donc $\tilde{w} \in C(u)$ par 15. Comme $v \in C_2(u)$, $v \circ \tilde{w} = \tilde{w} \circ v$. Pour $x \in E_i$, on a $v(x) \in E_i$, donc

$$v_i(w(x)) = v(\tilde{w}(x)) = \tilde{w}(v(x)) = w(v_i(x)).$$

Ainsi $v_i \circ w = w \circ v_i$ pour tout $w \in L(E_i)$.

$$v_i \in C(L(E_i)).$$

E_i est un espace vectoriel réel de dimension finie $r_i \geq 1$, donc, par la question 13 :

$$\exists \mu_i \in \mathbb{R}, \quad v_i = \mu_i \text{id}_{E_i}.$$

28. Interpolation.

On considère $\Phi : \mathbb{R}_{p-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^p$, $Q \mapsto (Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_p))$, qui est linéaire. Si $\Phi(Q) = 0$, Q est de degré $\leq p-1$ et a p racines distinctes, donc $Q = 0$: Φ est injective. Comme $\dim \mathbb{R}_{p-1}[X] = p = \dim \mathbb{R}^p$, le théorème du rang montre que Φ est bijective. Il existe donc un unique $Q \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $\Phi(Q) = (\mu_1, \dots, \mu_p)$.

$$\exists! Q \in \mathbb{R}_{p-1}[X], \quad \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad Q(\lambda_i) = \mu_i.$$

29. Conclusion.

Soit $v \in C_2(u)$, et soit Q le polynôme de 28. Pour $x \in E_i$, $u^k(x) = \lambda_i^k x$ par récurrence, donc $Q(u)(x) = Q(\lambda_i)x = \mu_i x = v_i(x) = v(x)$. Les endomorphismes v et $Q(u)$ coïncident donc sur chaque E_i . Comme $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$, ils coïncident sur E par linéarité : $v = Q(u) \in \mathbb{R}[u]$. Ainsi $C_2(u) \subset \mathbb{R}[u]$, et l'inclusion réciproque est la question 26.

$$C_2(u) = \mathbb{R}[u].$$