

ESSEC

Mathématiques

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2011

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1	Préliminaires	2
	<i>Thèmes abordés : espaces vectoriels ; applications linéaires.</i>	2
2	Étude d'un exemple	2
	<i>Thèmes abordés : suites ; séries ; fonctions d'une variable ; espaces vectoriels ; applications linéaires.</i>	2
3	Centre de $L(E)$	4
	<i>Thèmes abordés : espaces vectoriels ; applications linéaires.</i>	4
4	Commutant d'un endomorphisme diagonalisable	4
	<i>Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; applications linéaires.</i>	4
5	Centre du commutant d'un endomorphisme diagonalisable	5
	<i>Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; applications linéaires.</i>	5

Le problème comporte cinq parties. On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Si E est un espace vectoriel réel, $L(E)$ désigne l'ensemble de ses endomorphismes. Si U est une partie non vide de $L(E)$, son *centre*, noté $C(U)$, est l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les éléments de U :

$$C(U) = \{v \in L(E) \mid \forall u \in U, u \circ v = v \circ u\}.$$

Si $u \in L(E)$, on note plus simplement $C(u) = C(\{u\})$. Si $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on note $P(u) = \sum_{k=0}^d a_k u^k$; en particulier $1(u) = \text{id}_E$. Enfin,

$$\mathbb{R}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{R}[X]\}.$$

L'objectif du problème est de comparer $C(u)$ et $\mathbb{R}[u]$ dans certains cas.

1 Préliminaires

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; applications linéaires.

Dans cette partie, E est un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 1$, U est une partie non vide de $L(E)$ et $u \in L(E)$.

1. Montrer que $C(U)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E)$ de dimension supérieure ou égale à 1.
2. Vérifier que $C(u)$ contient $\mathbb{R}[u]$.
3. Soit λ une valeur propre de u , $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \text{id}_E)$ l'espace propre associé et $v \in C(u)$. Montrer que $E_\lambda(u)$ est stable par v .

2 Étude d'un exemple

Thèmes abordés : suites ; séries ; fonctions d'une variable ; espaces vectoriels ; applications linéaires.

Dans toute cette partie, on note

$$\begin{aligned} A &= \left\{ (a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n| \text{ converge} \right\}, \\ B &= \{(a_n)_{n \geq 0} \in A \mid \forall n \in \mathbb{N}, 2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n = 0\}, \\ H &= \left\{ f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ où } (a_n)_{n \geq 0} \in A \right\}, \\ E &= \left\{ f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ où } (a_n)_{n \geq 0} \in B \right\}. \end{aligned}$$

On pose $\alpha_n = 2^{-n}$, $\beta_n = (-1)^n$, $\gamma_n = n(-1)^n$, ainsi que

$$\varphi(x) = \frac{1}{2-x}, \quad \psi(x) = \frac{1}{1+x}, \quad \delta(x) = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

On admet que, pour $f \in H$, il existe une unique suite $(a_n)_{n \geq 0} \in A$ telle que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

4. Quelques propriétés de A .

- a) Vérifier que la suite constante égale à 1 appartient à A .
- b) Plus généralement, si $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et s'il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $a_n = o(n^s)$, montrer que $(a_n)_{n \geq 0} \in A$.
- c) En déduire que les suites $(\alpha_n)_{n \geq 0}$, $(\beta_n)_{n \geq 0}$ et $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ appartiennent à A .

5. Premières propriétés de H .

- a) Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications de $] -1, 1[$ dans $\mathbb{R}$.
- b) Montrer que les fonctions φ , ψ et δ appartiennent à H .

6. Premières propriétés de E .

- a) Déterminer les suites géométriques appartenant à B .
- b) Vérifier que la suite $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ appartient à B .
- c) En déduire que E est un sous-espace vectoriel de H contenant les fonctions φ , ψ et δ .

7. Caractérisation des éléments de E . Soit $f \in E$ tel que, pour tout $x \in] -1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, où $(a_n)_{n \geq 0} \in B$.

- a) Montrer que, pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$f(x)(x^3 - 3x - 2) + a_0(2 + 3x) + a_1(2x + 3x^2) + 2a_2x^2 = 0.$$

- b) En déduire qu'il existe une fonction polynôme Q de degré inférieur ou égal à 2 telle que, pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$f(x) = \frac{Q(x)}{x^3 - 3x - 2}.$$

- c) Montrer alors que f est combinaison linéaire des fonctions φ , ψ et δ .
- d) Conclure que E est un espace de dimension finie dont $\mathcal{C} = (\varphi, \psi, \delta)$ est une base.

8. L'endomorphisme u . Soient $(a_n)_{n \geq 0} \in B$ et $f \in E$ telle que, pour tout $x \in] -1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

- a) Montrer que la suite $(b_n)_{n \geq 0}$, définie par $b_n = a_{n+1}$, appartient à B . On note alors $u(f)$ l'application définie par

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad [u(f)](x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

- b) Vérifier que u est un endomorphisme de E .
- c) Déterminer u^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire un polynôme $\pi \in \mathbb{R}[X]$, de degré 3, tel que $\pi(u) = 0$.
- d) Déterminer la matrice T de u dans la base $\mathcal{C}$ et calculer T^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

9. Éléments propres de u .

- a) Quelles sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de u ?
- b) u est-il diagonalisable ?

10. Centre de u . Soit $v \in C(u)$.

- a) Montrer qu'il existe des réels λ et μ tels que $v(\varphi) = \lambda\varphi$ et $v(\psi) = \mu\psi$.

- b) Montrer qu'il existe aussi des réels η et ω tels que $v(\delta) = \eta\psi + \omega\delta$.
- c) Démontrer que $\mu = \omega$.
- d) Réciproquement, si v est un endomorphisme de E pour lequel il existe des réels λ , μ et η tels que

$$M_C(v) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \eta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

vérifier que $v \in C(u)$.

- e) Que vaut $\dim(C(u))$?
- f) Montrer que la famille (id_E, u, u^2) est libre dans $L(E)$.
- g) Comparer $C(u)$ et $\mathbb{R}[u]$.

3 Centre de $L(E)$

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; applications linéaires.

Dans cette partie, E est un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in L(E)$.

11. On suppose que tout vecteur non nul de E est vecteur propre de u . Montrer que u est une homothétie.
12. Soit U la partie de $L(E)$ formée des projecteurs de E et $v \in C(U)$. On se donne $e \in E \setminus \{0\}$ et un supplémentaire G de $F = \text{Vect}(e)$. En considérant la projection sur F parallèlement à G , montrer que v est une homothétie de E . En déduire $C(U)$.
13. Que vaut $C(L(E))$?

4 Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; applications linéaires.

Dans cette partie, $E = \mathbb{R}^n$ et u est un endomorphisme diagonalisable de E . On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u , $E_1, \dots, E_p$ les espaces propres correspondants et, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $r_i = \dim E_i$.

14. Justifier que, pour tout $v \in C(u)$ et tout $i \in \{1, \dots, p\}$, E_i est stable par v .
15. Réciproquement, si $v \in L(E)$ est tel que, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, E_i est stable par v , montrer que $v \in C(u)$.
16. Considérer une base $\mathcal{B}$ de E adaptée à l'écriture $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ et caractériser les endomorphismes de $C(u)$ par l'allure de leur matrice dans cette base.
17. En déduire que $\dim(C(u)) = \sum_{i=1}^p r_i^2$.
18. Montrer que $\dim(C(u)) \geq n$, puis que $\dim(C(u)) = n$ si et seulement si u admet n valeurs propres distinctes.
19. Écrire la matrice M de u dans la base $\mathcal{B}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer M^k , puis $P(M)$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.
20. On note $\pi(X) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$. Que vaut $\pi(u)$?

21. Plus généralement, si $P \in \mathbb{R}[X]$, vérifier que $P(u) = 0$ si et seulement si, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $P(\lambda_i) = 0$.
22. En déduire que la famille $(\text{id}_E, u, \dots, u^{p-1})$ est libre dans $L(E)$.
23. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k \in \text{Vect}(\text{id}_E, u, \dots, u^{p-1})$. En déduire que $\dim \mathbb{R}[u] = p$.
24. Démontrer que $C(u) = \mathbb{R}[u]$ si et seulement si u admet n valeurs propres distinctes.

5 Centre du commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; applications linéaires.

On garde les mêmes notations et hypothèses que dans la partie précédente. On veut déterminer $C(C(u))$, que l'on notera plus simplement $C_2(u)$.

25. Vérifier que $C_2(u) \subset C(u)$.
26. Montrer que $\mathbb{R}[u] \subset C_2(u)$.
27. Pour $v \in C_2(u)$ et $i \in \{1, \dots, p\}$, on note v_i l'endomorphisme de E_i défini par $v_i(x) = v(x)$. Montrer que $v_i \in C(L(E_i))$. En déduire qu'il existe un réel μ_i tel que $v_i = \mu_i \text{id}_{E_i}$.
28. Montrer qu'il existe un unique polynôme Q de degré inférieur ou égal à $p - 1$ tel que, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $Q(\lambda_i) = \mu_i$.
29. Démontrer que $C_2(u) = \mathbb{R}[u]$.