

ECRICOME

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2012

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Exercice 1

Exercice 1 – La fonction $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x+e^t}$

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+e^t)^2}, I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at} dt.$$

Corrigé – Exercice 1.

1. Convergences.

Pour $A > 0$, $\int_0^A e^{-at} dt = \frac{1-e^{-aA}}{a} \rightarrow \frac{1}{a}$, d'où $I_a = \frac{1}{a}$. Pour $x \geq 0$, $t \mapsto \frac{1}{x+e^t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $0 \leq \frac{1}{x+e^t} \leq e^{-t}$. Par comparaison avec I_1 :

$$f(x) \text{ converge pour tout } x \geq 0.$$

2. Majoration de f .

On a $x + e^t - 2\sqrt{xe^t} = (\sqrt{x} - \sqrt{e^t})^2 \geq 0$. Pour $x > 0$, on en déduit $0 \leq \frac{1}{x+e^t} \leq \frac{e^{-t/2}}{2\sqrt{x}}$, puis, par croissance de l'intégrale, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} I_{1/2}$.

$$2\sqrt{xe^t} \leq x + e^t \quad \text{et} \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

3. Caractère lipschitzien.

Par linéarité des intégrales convergentes,

$$f(x) - f(y) = \int_0^{+\infty} \frac{y-x}{(x+e^t)(y+e^t)} dt.$$

L'intégrande est continu et strictement positif, donc $f(x) - f(y) > 0$. De plus, $(x+e^t)(y+e^t) \geq e^{2t}$, donc $f(x) - f(y) \leq (y-x)I_2$.

$$0 < f(x) - f(y) \leq \frac{y-x}{2}.$$

4. Bijection.

Par 3, f est strictement décroissante et $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne, donc continue sur $\mathbb{R}_+$. On a $f(0) = I_1 = 1$ et, par 2, $f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. Par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $] \lim_{+\infty} f, f(0)]$.

$$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow]0, 1] \text{ est une bijection continue strictement décroissante.}$$

5. Point fixe.

$\varphi : x \mapsto f(x) - x$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, avec $\varphi(0) = 1 > 0$ et $\varphi(x) \rightarrow -\infty$ en $+\infty$. Par le théorème de la bijection, φ s'annule une et une seule fois. Comme $\alpha = f(\alpha) \in]0, 1]$:

$$\boxed{\exists! \alpha \in \mathbb{R}_+, f(\alpha) = \alpha, \quad \text{et } \alpha \in]0, 1].}$$

6. Suite récurrente.

- a) Par récurrence, $u_n \in \mathbb{R}_+$ pour tout n (car $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$). Pour $n = 0$, $|\alpha - u_0| = \alpha \leq 1$.
 1. Si $|\alpha - u_n| \leq 2^{-n}$, alors, par 3, $|\alpha - u_{n+1}| = |f(\alpha) - f(u_n)| \leq \frac{1}{2}|\alpha - u_n| \leq 2^{-(n+1)}$.

$$\boxed{|\alpha - u_n| \leq \frac{1}{2^n}, \quad \text{donc } u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha.}$$

- b) On calcule simultanément N et u_N : tant que $2^{-N} > \varepsilon$, on remplace u par $f(u)$ et on incrémente N .

def suite(eps):

N = 0

u = 0

while 2(-N) > eps:**

u = ecricome(u)

N = N + 1

return u

7. Dérivabilité.

On a $x + e^t > 0$ et $x + h + e^t > e^t$, car $x + h > 0$. Par linéarité,

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) + hg(x) &= \int_0^{+\infty} \left[\frac{-h}{(x+h+e^t)(x+e^t)} + \frac{h}{(x+e^t)^2} \right] dt \\ &= h^2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+e^t)^2(x+h+e^t)}. \end{aligned}$$

Le dernier intégrande est positif et majoré par e^{-3t} , et $I_3 = \frac{1}{3}$. Donc :

$$\boxed{|f(x+h) - f(x) + hg(x)| \leq \frac{h^2}{3}.}$$

Pour $h \neq 0$, $\left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + g(x) \right| \leq \frac{|h|}{3} \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$:

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } f' = -g.}$$

8. Calcul de f .

T est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$\begin{aligned} T'(x) = f(x) - xg(x) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+e^t} - \frac{x}{(x+e^t)^2} \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(x+e^t)^2} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x+e^t} \right]_0^A. \end{aligned}$$

$$T'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Ainsi $T(x) - \ln(1+x)$ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Par 2, $0 \leq T(x) \leq \sqrt{x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$, et $\ln(1+x) \rightarrow 0$, donc la constante est nulle.

$$\forall x > 0, \quad T(x) = \ln(1+x), \quad \text{i.e. } f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Exercice 2

Exercice 2 – Décomposition d'une matrice en partie projecteur et partie nilpotente

$$(B(B - I_n))^N = 0_n, \quad B_{k+1} = B_k^2(2B_k - I_n)^{-1}.$$

Corrigé – Exercice 2.

1. Deux résultats préliminaires.

- a) Le produit télescopique donne $(I_n - U) \sum_{k=0}^{q-1} U^k = \sum_{k=0}^{q-1} U^k - \sum_{k=1}^q U^k = I_n - U^q = I_n$.

$$I_n - U \text{ est inversible et } (I_n - U)^{-1} = \sum_{k=0}^{q-1} U^k.$$

- b) $A^2 = A$, donc $f^2 = f$. Ainsi $f(x - f(x)) = f(x) - f^2(x) = 0$ et $(f - \text{Id})(f(x)) = f^2(x) - f(x) = 0$. L'écriture $x = (x - f(x)) + f(x)$ montre que $\mathbb{R}^n = \ker f + \ker(f - \text{Id})$. Si $x \in \ker f \cap \ker(f - \text{Id})$, alors $x = f(x) = 0$: la somme est directe.

$$\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \ker(f - \text{Id}).$$

Les sous-espaces propres de f (pour 0 et 1, éventuellement réduits à $\{0\}$) ont pour somme $\mathbb{R}^n$, donc f est diagonalisable.

2. Étude d'une suite de matrices.

On note $Q = B(B - I_n)$, qui commute avec B et vérifie $Q^N = 0_n$.

- a) $I_n - (2B - I_n)^2 = -4B^2 + 4B = -4Q$, et $(-4Q)^N = (-4)^N Q^N = 0_n$: c'est une matrice nilpotente. Par 1a), $(2B - I_n)^2 = I_n - (-4Q)$ est inversible, donc $2B - I_n$ aussi (si M^2 est inversible, $M \cdot M(M^2)^{-1} = I_n$). Pour $(\mathcal{H}_0)$, on prend $C_0 = 0_n$ et $D_0 = I_n$: on a $B_0 - B = 0_n = QC_0$ et $B_0(B_0 - I_n) = Q^{2^0} D_0$, et les commutations sont évidentes.

$$I_n - (2B - I_n)^2 \text{ est nilpotente, } 2B - I_n \text{ est inversible, et } (\mathcal{H}_0) \text{ est vraie.}$$

- b) On note $J = (2B_k - I_n)^{-1}$. J commute avec B_k (inverse d'un polynôme en B_k) et avec B (car $2B_k - I_n$ commute avec B).
- On a $2B_{k+1} - I_n = (2B_k^2 - (2B_k - I_n))J = (I_n + 2B_k^2 - 2B_k)J = [I_n + 2B_k(B_k - I_n)]J$.

- $B_{k+1} - B = (B_k^2 - B(2B_k - I_n))J = (B_k^2 - 2BB_k + B)J$. Comme $BB_k = B_kB$, on a $B_k^2 - 2BB_k + B = (B_k - B)^2 - (B^2 - B)$.
- On a $B_{k+1} - I_n = (B_k^2 - 2B_k + I_n)J = (B_k - I_n)^2 J$, donc $B_{k+1}(B_{k+1} - I_n) = B_k^2 J(B_k - I_n)^2 J = [B_k(B_k - I_n)J]^2$, toutes ces matrices commutent.

Les trois égalités sont établies.

Montrons $(\mathcal{H}_{k+1})$.

- $2B_k(B_k - I_n) = 2Q^{2^k} D_k$ et $(Q^{2^k} D_k)^N = Q^{2^k N} D_k^N = 0_n$ (commutation). Par 1a), $I_n + 2B_k(B_k - I_n)$ est inversible. Ainsi $2B_{k+1} - I_n$, produit de deux matrices inversibles, est inversible.
- $B_{k+1} - B = [Q^2 C_k^2 - Q]J = Q C_{k+1}$ avec $C_{k+1} = (Q C_k^2 - I_n)J$.
- $B_{k+1}(B_{k+1} - I_n) = Q^{2 \cdot 2^k} D_k^2 J^2 = Q^{2^{k+1}} D_{k+1}$ avec $D_{k+1} = D_k^2 J^2$.
- B_{k+1} , C_{k+1} et D_{k+1} sont des produits de matrices commutant avec B , donc ils commutent avec B .

$(\mathcal{H}_k) \implies (\mathcal{H}_{k+1})$, donc $(\mathcal{H}_k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- c) On choisit p tel que $2^p \geq N$. Alors $Q^{2^p} = Q^N Q^{2^p - N} = 0_n$, et $B_p(B_p - I_n) = Q^{2^p} D_p = 0_n$. Par 1b), B_p est diagonalisable. De plus, $(B - B_p)^N = (-Q C_p)^N = (-1)^N Q^N C_p^N = 0_n$. Enfin, si $B_k^2 = B_k$, alors $B_k(2B_k - I_n) = B_k$, donc $B_{k+1} = B_k J = B_k(2B_k - I_n)J = B_k$, et $B_{k+1}^2 = B_{k+1}$. Par récurrence à partir de $k = p$:

$B_p(B_p - I_n) = 0_n$, B_p diagonalisable, $B - B_p$ nilpotente,

$\forall k \geq p, B_{k+1} = B_k$.

Problème

Problème – Partie I – Étude de deux endomorphismes

$$g(P) = [(X - 1)P]', \quad f(P)(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x P(t) dt \quad (x \neq 1), \quad f(P)(1) = P(1).$$

Corrigé – Problème.

1. g est un endomorphisme.

g est linéaire, par linéarité de la dérivation et du produit par $X - 1$. Si $\deg P \leq n$, alors $\deg((X - 1)P) \leq n + 1$, donc $\deg g(P) \leq n$.

$g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

2. Calcul de $f \circ g$.

Pour $x \neq 1$, $(t - 1)P(t)$ est une primitive de $g(P)$, donc

$$f(g(P))(x) = \frac{1}{x-1} [(t-1)P(t)]_1^x = P(x).$$

En 1, on a $f(g(P))(1) = g(P)(1) = 0 \cdot P'(1) + P(1) = P(1)$. Si $g(P) = 0$, alors $P = f(0) = 0$.

$$f(g(P)) = P, \quad \ker(g) = \{0\}.$$

3. $f = g^{-1}$.

g est un endomorphisme injectif de l'espace de dimension finie $\mathbb{R}_n[X]$: c'est un isomorphisme. Pour $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $f(Q) = f(g(g^{-1}(Q))) = g^{-1}(Q) \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$g \text{ est un isomorphisme, } g^{-1} = f, \text{ et } f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].$$

4. Matrices.

On a $g(e_k) = (X^{k+1} - X^k)' = (k+1)e_k - ke_{k-1}$. Pour $x \neq 1$, $f(e_k)(x) = \frac{x^{k+1}-1}{(k+1)(x-1)} = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k x^j$, égalité qui reste vraie en $x = 1$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n+1 \end{pmatrix}, \quad A = \left(\frac{\mathbf{1}_{j \leq k}}{k+1} \right)_{0 \leq j, k \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}.$$

5. Diagonalisabilité.

B est triangulaire supérieure : ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux $1, 2, \dots, n+1$. Ce sont $n+1$ valeurs propres distinctes en dimension $n+1$, donc g est diagonalisable. Une base de vecteurs propres de g (pour λ) est aussi une base de vecteurs propres de $f = g^{-1}$ (pour $\frac{1}{\lambda}$).

$$f \text{ et } g \text{ sont diagonalisables.}$$

Problème – Partie II – Une suite de variables aléatoires

$$F_k = \sum_{r=0}^n \mathbb{P}(Z_k = r) X^r, \quad Z_0 = n.$$

Corrigé – Problème.

1. Loi de Z_{k+1} sachant Z_k .

$([Z_k = i])_{0 \leq i \leq n}$ est un système complet d'événements. Si $\mathbb{P}(Z_k = i) > 0$, le $(k+1)$ -ième tirage a lieu dans U_i , et $\mathbb{P}_{[Z_k=i]}(Z_{k+1} = r) = \frac{1}{i+1}$ si $r \leq i$, 0 sinon. Par la formule des probabilités totales (les termes où $\mathbb{P}(Z_k = i) = 0$ sont nuls) :

$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=r}^n \frac{\mathbb{P}(Z_k = i)}{i+1}.$$

2. Relations de récurrence.

Pour $r = n$, la somme se réduit à un terme, ce qui donne $(\mathcal{R}_1)$. Pour $r \leq n-1$, on fait la différence des formules en r et en $r+1$: $\mathbb{P}(Z_{k+1} = r) - \mathbb{P}(Z_{k+1} = r+1) = \frac{\mathbb{P}(Z_k = r)}{r+1}$,

ce qui donne $(\mathcal{R}_2)$.

$$\begin{aligned} (n+1)\mathbb{P}(Z_{k+1} = n) &= \mathbb{P}(Z_k = n), \\ (r+1)[\mathbb{P}(Z_{k+1} = r) - \mathbb{P}(Z_{k+1} = r+1)] &= \mathbb{P}(Z_k = r). \end{aligned}$$

3. Sommes S_r .

On rappelle que $\mathbb{P}(Z_0 = n) = 1$ et $\mathbb{P}(Z_0 = r) = 0$ pour $r < n$, donc $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(Z_{k+1} = r) = S_r - \mathbb{P}(Z_0 = r)$.

a) On somme $(\mathcal{R}_1)$: $(n+1)(S_n - 1) = S_n$.

$$S_n = \frac{n+1}{n}.$$

b) On suppose $n \geq 2$. On somme $(\mathcal{R}_2)$ pour $r = n-1$: $nS_{n-1} - n(S_n - 1) = S_{n-1}$, d'où $(n-1)S_{n-1} = n(S_n - 1) = 1$. Pour $1 \leq r \leq n-2$, on somme $(\mathcal{R}_2)$: $(r+1)S_r - (r+1)S_{r+1} = S_r$, soit $rS_r = (r+1)S_{r+1}$.

$$S_{n-1} = \frac{1}{n-1}, \quad (rS_r)_{1 \leq r \leq n-1} \text{ est constante (égale à 1), donc } S_r = \frac{1}{r}.$$

4. Relation $(\mathcal{S})$.

On note $p_r = \mathbb{P}(Z_{k+1} = r)$ et $p_{n+1} = 0$. Par la question I.4,

$$\begin{aligned} (x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) &= g(F_{k+1})(x) = \sum_{r=0}^n p_r((r+1)x^r - rx^{r-1}) \\ &= \sum_{r=0}^n (r+1)(p_r - p_{r+1})x^r. \end{aligned}$$

Par $(\mathcal{R}_1)$ et $(\mathcal{R}_2)$, le coefficient de x^r vaut $\mathbb{P}(Z_k = r)$.

$$(x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x).$$

5. Espérance et variance.

a) $F'_k(1) = \sum r\mathbb{P}(Z_k = r)$ et $F''_k(1) = \sum r(r-1)\mathbb{P}(Z_k = r)$. Par le théorème de transfert :

$$F'_k(1) = \mathbb{E}(Z_k), \quad F''_k(1) = \mathbb{E}(Z_k(Z_k - 1)).$$

b) On dérive $(\mathcal{S})$: $(x-1)F''_{k+1}(x) + 2F'_{k+1}(x) = F'_k(x)$. On dérive une seconde fois : $(x-1)F'''_{k+1}(x) + 3F''_{k+1}(x) = F''_k(x)$. On évalue en $x = 1$:

$$F'_{k+1}(1) = \frac{1}{2}F'_k(1), \quad F''_{k+1}(1) = \frac{1}{3}F''_k(1).$$

c) Ce sont des suites géométriques, avec $F_0 = X^n$, donc $F'_0(1) = n$ et $F''_0(1) = n(n-1)$. Par la formule de Koenig-Huygens, $\mathbb{V}(Z_k) = \mathbb{E}(Z_k(Z_k - 1)) + \mathbb{E}(Z_k) - \mathbb{E}(Z_k)^2$.

$$F'_k(1) = \frac{n}{2^k}, \quad F''_k(1) = \frac{n(n-1)}{3^k},$$

$$\mathbb{V}(Z_k) = \frac{n(n-1)}{3^k} + \frac{n}{2^k} - \frac{n^2}{4^k}.$$

Problème – Partie III – Loi de Z_k

$$u_k = (X - 1)^k, g(F_{k+1}) = F_k.$$

Corrigé – Problème.

1. Expression de F_k .

$F_0 = X^n = e_n$, car $Z_0 = n$. Comme g est bijective d'inverse f , $g(F_{k+1}) = F_k$ donne $F_{k+1} = f(F_k)$. Par récurrence :

$$F_k = \sum_{r=0}^n \mathbb{P}(Z_k = r) e_r = f^k(e_n).$$

2. Base (u_r) .

Les u_r sont de degrés échelonnés ($\deg u_r = r$) : la famille est libre. Elle compte $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ éléments.

$$(u_0, \dots, u_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].$$

3. Vecteurs propres de f .

Pour $x \neq 1$, $f(u_r)(x) = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(x-1)^{r+1}}{r+1} = \frac{(x-1)^r}{r+1}$; en $x = 1$, $f(u_r)(1) = u_r(1)$, qui vaut 0 si $r \geq 1$ et 1 si $r = 0$, ce qui est cohérent.

$$f(u_r) = \frac{1}{r+1} u_r : (u_r) \text{ est une base de vecteurs propres, donc } f \text{ est diagonalisable.}$$

4. Changements de base.

Par la formule du binôme, $X^n = ((X - 1) + 1)^n = \sum_r \binom{n}{r} (X - 1)^r$ et $(X - 1)^r = \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} X^j (-1)^{r-j}$.

$$e_n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} u_r, \quad u_r = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j.$$

5. Puissances de f .

Par linéarité et 3, $f^k(u_r) = \frac{u_r}{(r+1)^k}$, donc :

$$f^k(e_n) = \sum_{r=0}^n \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} u_r.$$

6. Loi de Z_k .

On reporte l'expression des u_r et on intervertit les sommes finies ($0 \leq j \leq r \leq n$) :

$$F_k = \sum_{r=0}^n \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{r=j}^n (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r} \binom{r}{j}}{(r+1)^k} \right) e_j.$$

Par unicité des coordonnées dans la base (e_j) et la question 1 :

$$\mathbb{P}(Z_k = j) = \sum_{r=j}^n (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r} \binom{r}{j}}{(r+1)^k}.$$

7. Application.

- a) Pour $r \geq j$, $\frac{1}{(r+1)^k} \leq \frac{1}{(j+1)^k}$. Par l'inégalité triangulaire et $\binom{n}{r}\binom{r}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{r-j}$, on obtient $\sum_{r=j}^n \binom{n}{r}\binom{r}{j} = \binom{n}{j}2^{n-j}$.

$$|\mathbb{P}(Z_k = j)| \leq \frac{M_{n,j}}{(j+1)^k}, \quad M_{n,j} = \binom{n}{j}2^{n-j}.$$

Pour $j \geq 1$, $\frac{1}{j+1} \in]0, 1[$: la série géométrique $\sum \frac{1}{(j+1)^k}$ converge. Par comparaison (termes positifs) :

$$\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(Z_k = j) \text{ converge pour } j \in \{1, \dots, n\}.$$

- b) Le terme $r = 0$ de la formule pour $j = 0$ vaut 1, et les autres sont majorés en valeur absolue par $\frac{\binom{n}{r}}{2^k}$.

$$|\mathbb{P}(Z_k = 0) - 1| \leq \frac{C_n}{2^k}, \quad C_n = \sum_{r=1}^n \binom{n}{r} = 2^n - 1.$$

Ainsi $\mathbb{P}(Z_k = 0) \rightarrow 1$: le terme général ne tend pas vers 0.

$$\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(Z_k = 0) \text{ diverge (grossièrement).}$$