

ECRICOME

Mathématiques

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2012

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1 Exercice 1	2
<i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; intégrales généralisées ; suites ; Python. . .</i>	<i>2</i>
2 Exercice 2	3
<i>Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; applications linéaires.</i>	<i>3</i>
3 Problème	4
<i>Thèmes abordés : applications linéaires ; probabilités discrètes ; suites.</i>	<i>4</i>

1 Exercice 1

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; intégrales généralisées ; suites ; Python.

Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. On pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + e^t}, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x + e^t)^2}, \quad I_a = \int_0^{+\infty} e^{-at} dt.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que l'intégrale I_a converge et donner sa valeur.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Justifier que l'intégrale $f(x)$ converge.

Dans la suite de l'exercice, on admettra que l'intégrale $g(x)$ converge.

2. Établir que, pour tous $x \in \mathbb{R}_+$ et $t \in \mathbb{R}_+$,

$$2\sqrt{xe^t} \leq x + e^t,$$

puis que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x < y$. Établir que

$$0 < f(x) - f(y) \leq \frac{y - x}{2}.$$

4. Montrer que f réalise une bijection continue strictement décroissante de $\mathbb{R}_+$ sur $]0, 1]$.
5. Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. On note α cette solution. Justifier que $\alpha \in]0, 1]$.
6. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\alpha - u_n| \leq 2^{-n}$. En déduire la limite de $(u_n)_{n \geq 0}$.

b) On suppose qu'une fonction `ecricome(x)` renvoie le réel $f(x)$. Écrire une fonction Python `suite(eps)` qui, pour un réel `eps` strictement positif fourni par l'utilisateur, calcule le premier entier N tel que $2^{-N} \leq \text{eps}$, puis renvoie la valeur correspondante u_N .

```
def suite(eps):
    n = 0
    u = 0.0
    while 2 ** (-n) > eps:
        u = ecricome(u)
        n += 1
    return u
```

7. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}$ tels que $x + h \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que

$$|f(x + h) - f(x) + hg(x)| \leq \frac{h^2}{3}.$$

Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = -g(x).$$

8. On considère la fonction T définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $T(x) = xf(x)$. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$T'(x) = \frac{1}{1 + x},$$

puis que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$T(x) = \ln(1 + x).$$

2 Exercice 2

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; réduction ; applications linéaires.

Pour tout entier naturel n non nul, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels, I_n la matrice identité et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Une matrice $W \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $W^q = 0_n$.

On admettra que si U, V sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent, alors U^k et V^q commutent pour tous entiers k et q , et que U^{-1} commute avec V lorsque U est inversible.

1. Deux résultats préliminaires.

- a) Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $U^q = 0_n$. Prouver que $I_n - U$ est inversible et que

$$(I_n - U)^{-1} = \sum_{k=0}^{q-1} U^k.$$

- b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A(A - I_n) = 0_n$. On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A .

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Vérifier que $x - f(x) \in \ker(f)$ et $f(x) \in \ker(f - \text{Id})$, puis établir que

$$\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \ker(f - \text{Id}).$$

L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Étude d'une suite de matrices.

Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$(B(B - I_n))^N = 0_n.$$

On introduit la suite $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$B_0 = B \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad B_{k+1} = (B_k)^2(2B_k - I_n)^{-1}.$$

On considère, pour tout entier $k \geq 0$, la proposition $(\mathcal{H}_k)$:

« $2B_k - I_n$ est inversible, il existe $C_k, D_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que

$$B_k - B = (B(B - I_n))C_k, \quad B_k(B_k - I_n) = (B(B - I_n))^{2^k} D_k,$$

avec $B_k B = B B_k$, $C_k B = B C_k$ et $D_k B = B D_k$. »

- a) Justifier que $I_n - (2B - I_n)^2$ est nilpotente et que $2B - I_n$ est inversible. En déduire que la propriété $(\mathcal{H}_0)$ est vraie.
- b) On suppose la propriété $(\mathcal{H}_k)$ vraie pour un entier $k \geq 0$. Montrer que

$$2B_{k+1} - I_n = [I_n + 2B_k(B_k - I_n)](2B_k - I_n)^{-1},$$

$$B_{k+1} - B = [(B_k - B)^2 - (B^2 - B)](2B_k - I_n)^{-1},$$

$$B_{k+1}(B_{k+1} - I_n) = [B_k(B_k - I_n)(2B_k - I_n)^{-1}]^2.$$

En déduire que la propriété $(\mathcal{H}_{k+1})$ est vraie.

- c) Prouver l'existence d'un entier p tel que $B_p(B_p - I_n) = 0_n$. Établir que la matrice B_p est diagonalisable, que la matrice $B - B_p$ est nilpotente et que, pour tout $k \geq p$, $B_{k+1} = B_k$.

3 Problème

Thèmes abordés : applications linéaires ; probabilités discrètes ; suites.

L'objectif de ce problème est d'étudier une suite de variables aléatoires $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Les deux premières parties sont indépendantes et la troisième utilise certains résultats obtenus dans les deux premières parties. La partie I est consacrée à l'étude de deux endomorphismes sur $\mathbb{R}_n[X]$. La partie II consiste à calculer l'espérance et la variance de Z_k , ainsi qu'à calculer la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_k = r)$ sous réserve de convergence. La partie III fournira la loi de Z_k ainsi que l'étude de la convergence de la série $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(Z_k = r)$.

Partie I : Étude de deux endomorphismes

Soit n un entier naturel. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n . Pour tout entier $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on désigne par e_k le polynôme défini par $e_k = X^k$.

Rappelons que $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on définit les fonctions $f(P)$ et $g(P)$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(P)(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x P(t) dt \quad \text{et} \quad f(P)(1) = P(1),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(P)(x) = [(X-1)P'](x) = (x-1)P'(x) + P(x).$$

1. Prouver que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Calculer $f(g(P))$ puis justifier que $\ker(g) = \{0\}$.
3. Démontrer que g est un isomorphisme, que $g^{-1} = f$ et que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Écrire la matrice A de f dans la base $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ ainsi que la matrice B de g dans cette même base.
5. Montrer que f et g sont diagonalisables.

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose de $n+1$ urnes notées $U_0, U_1, \dots, U_n$ et on suppose que, pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, l'urne U_i contient $i+1$ boules numérotées $0, 1, \dots, i$. On s'intéresse au jeu suivant :

- au premier tirage, on pioche une boule dans l'urne U_n . Si la boule porte le numéro r , alors on repose la boule dans l'urne U_n , puis le tirage suivant s'effectue dans l'urne U_r ;
- plus généralement, pour tout entier k non nul, si la boule numérotée s a été piochée au k -ième tirage dans une certaine urne, on repose cette boule dans la même urne, puis on effectue le $(k+1)$ -ième tirage dans l'urne U_s .

Pour tout entier naturel k , on note Z_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule piochée au k -ième tirage, avec la convention $Z_0 = n$. On note aussi F_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$F_k(x) = \sum_{r=0}^n \mathbb{P}(Z_k = r) x^r,$$

et $\mathbb{E}(Z_k)$ l'espérance de Z_k .

1. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $r \in \{0, 1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=r}^n \frac{\mathbb{P}(Z_k = i)}{i+1}.$$

2. Établir les deux formules suivantes, valables pour tous entiers $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, \dots, n-1\}$:

$$\begin{cases} (\mathcal{R}_1) : & (n+1)\mathbb{P}(Z_{k+1} = n) = \mathbb{P}(Z_k = n), \\ (\mathcal{R}_2) : & (r+1)\mathbb{P}(Z_{k+1} = r) - (r+1)\mathbb{P}(Z_{k+1} = r+1) = \mathbb{P}(Z_k = r). \end{cases}$$

3. On admet dans cette question que la série $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(Z_k = r)$ converge pour tout $r \in \{1, \dots, n\}$ et on pose $S_r = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_k = r)$.

- a) En sommant les relations $(\mathcal{R}_1)$ sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de S_n .
 b) En sommant les relations $(\mathcal{R}_2)$ sur tous les entiers $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de S_{n-1} et montrer que la suite $(rS_r)_{1 \leq r \leq n-1}$ est constante.

4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer la relation

$$(\mathcal{S}) : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) = F_k(x).$$

5. a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Établir que $F'_k(1) = \mathbb{E}(Z_k)$ et $F''_k(1) = \mathbb{E}(Z_k(Z_k - 1))$.
 b) En dérivant une fois puis deux fois la relation $(\mathcal{S})$, donner la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F'_k(1))_{k \in \mathbb{N}}$ ainsi que la relation de récurrence vérifiée par la suite $(F''_k(1))_{k \in \mathbb{N}}$.
 c) Donner la valeur de $F'_k(1)$ et de $F''_k(1)$ en fonction de k et n . Expliciter alors la variance $\mathbb{V}(Z_k)$ de Z_k en fonction de k et n .

Partie III : Loi de chacune de ces variables aléatoires

On reprend toutes les notations des parties I et II et on pourra admettre tous les résultats établis dans ces deux parties. Rappelons également qu'à la question II.4 la relation $(\mathcal{S})$ est démontrée, ce qui revient à écrire

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad g(F_{k+1}) = F_k.$$

Pour finir, pour tout entier $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on désigne par u_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $u_k = (X-1)^k$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{r=0}^n \mathbb{P}(Z_k = r) e_r = F_k = f^k(e_n).$$

2. Prouver que $(u_0, u_1, \dots, u_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
 3. Calculer $f(u_r)$ pour $r \in \{0, 1, \dots, n\}$. Retrouver ainsi que f est diagonalisable.
 4. Justifier que

$$e_n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} u_r \quad \text{et que} \quad \forall r \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad u_r = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} e_j.$$

5. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f^k(e_n) = \sum_{r=0}^n \frac{\binom{n}{r}}{(r+1)^k} u_r.$$

6. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. À l'aide des questions précédentes, établir que

$$\mathbb{P}(Z_k = j) = \sum_{r=j}^n (-1)^{r-j} \frac{\binom{n}{r} \binom{r}{j}}{(r+1)^k}.$$

7. Application.

a) Soit $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. Déterminer un réel $M_{n,j}$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|\mathbb{P}(Z_k = j)| \leq \frac{M_{n,j}}{(j+1)^k},$$

puis justifier que la série $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(Z_k = j)$ converge lorsque $j \in \{1, \dots, n\}$.

b) Déterminer un réel C_n tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|\mathbb{P}(Z_k = 0) - 1| \leq \frac{C_n}{2^k}.$$

La série $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(Z_k = 0)$ est-elle convergente ?