

EDHEC

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2012

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Exercice 1

Exercice 1 – Racine carrée d'un endomorphisme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Corrigé – Exercice 1.

1. Éléments propres.

a) Le calcul donne $A^3 = 2A^2$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$X^3 - 2X^2 = X^2(X - 2) \text{ est un polynôme annulateur de } f.$$

b) Les valeurs propres de f sont parmi les racines 0 et 2 du polynôme annulateur. Or

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ et } A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Sp}(f) = \{0, 2\}.$$

c) $\ker f$: le système $x + y - z = 0$, $-x + 3y - 3z = 0$, $-2x + 2y - 2z = 0$ donne $x = 0$, $y = z$, donc $\ker f = \text{Vect}((0, 1, 1))$. De même, $\ker(f - 2\text{Id}) = \text{Vect}((1, 1, 0))$ ($-x + y - z = 0$, $-x + y - 3z = 0$, d'où $z = 0$, $x = y$). La somme des dimensions vaut $2 < 3$.

$$f \text{ n'est pas diagonalisable.}$$

2. Réduction.

On cherche (u_1, u_2, u_3) avec $f(u_1) = 0$, $f(u_2) = u_1$, $f(u_3) = 2u_3$. On prend $u_3 = (1, 1, 0)$ et $u_2 = (-1, 1, 0) \in \ker f^2 \setminus \ker f$ (car $A^2 u_2 = 0$ et $A u_2 = (0, 4, 4) \neq 0$), puis $u_1 =$

$f(u_2) = (0, 4, 4)$. La matrice de passage $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible : on échelonne en

partant de la troisième ligne, et ses colonnes sont libres.

$$\mathcal{B} = ((0, 4, 4), (-1, 1, 0), (1, 1, 0)), \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = T.$$

3. Pas de racine carrée.

- a) Dans la base $\mathcal{B}$, $T^2 = \text{diag}(0, 0, 4)$, donc $\ker f^2 = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et $\ker(f - 2\text{Id}) = \text{Vect}(u_3)$. Comme $\mathcal{B}$ est une base :

$$\mathbb{R}^3 = \ker(f^2) \oplus \ker(f - 2\text{Id}).$$

- b) g commute avec $g^2 = f$, donc avec f^2 . Si $f^2(x) = 0$, alors $f^2(g(x)) = g(f^2(x)) = 0$: $\ker f^2$ est stable par g . Ainsi $g(u_1)$ et $g(u_2)$ appartiennent à $\text{Vect}(u_1, u_2)$, et leur troisième coordonnée dans $\mathcal{B}$ est nulle.

$$G = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}.$$

On note $M = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le bloc diagonal supérieur de $G^2 = T$ donne $M^2 = N$, donc $M^4 = N^2 = 0$. Ainsi M n'est pas inversible, et $\text{rg } M \geq \text{rg } M^2 = 1$, d'où $\text{rg } M = 1$: $\text{Im } M = \text{Vect}(v)$ avec $v \neq 0$. Comme $Mv \in \text{Im } M$, on a $Mv = \mu v$, puis $0 = M^4v = \mu^4v$, donc $\mu = 0$. Alors $\text{Im } M^2 = M(\text{Im } M) = \text{Vect}(Mv) = \{0\}$, soit $M^2 = 0 \neq N$. C'est une contradiction.

$$\text{Il n'existe aucun endomorphisme } g \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ tel que } g^2 = f.$$

4. Cas général.

- a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On pose $v = \frac{1}{\alpha^{n-1}}h^{n-1}(x)$ et $u = x - v$. On a $(h - \alpha\text{Id})(h^{n-1}(x)) = h^n(x) - \alpha h^{n-1}(x) = 0$, donc $v \in \ker(h - \alpha\text{Id})$. Par suite, $h^{n-1}(v) = \alpha^{n-1}v = h^{n-1}(x)$, d'où $h^{n-1}(u) = 0$. Enfin, si $x \in \ker h^{n-1} \cap \ker(h - \alpha\text{Id})$, alors $0 = h^{n-1}(x) = \alpha^{n-1}x$, donc $x = 0$, car $\alpha \neq 0$.

$$\mathbb{R}^n = \ker(h^{n-1}) \oplus \ker(h - \alpha\text{Id}).$$

- b) Soit $x = u + v$ avec $u \in \ker h^{n-1}$ et $v \in \ker(h - \alpha\text{Id})$. Comme h^{n-1} et $h - \alpha\text{Id}$ commutent,

$$(h^n - \alpha h^{n-1})(x) = (h - \alpha\text{Id})(h^{n-1}(u)) + h^{n-1}((h - \alpha\text{Id})(v)) = 0.$$

$$h^n = \alpha h^{n-1}.$$

Exercice 2

Exercice 2 – Quotient et maximum de lois exponentielles

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Corrigé – Exercice 2.

1. La variable $T = \frac{X_1}{X_0}$.

- a) Pour $x > 0$, $\mathbb{P}(-xX_0 \leq t) = \mathbb{P}(X_0 \geq -\frac{t}{x})$, qui vaut $e^{\lambda t/x}$ si $t < 0$ et 1 sinon. Cette fonction est continue, et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en 0.

$$f_{-xX_0}(t) = \frac{\lambda}{x} e^{\lambda t/x} \quad (t < 0), \quad 0 \quad (t \geq 0).$$

- b) X_1 et $-xX_0$ sont indépendantes. Par le produit de convolution, une densité de $X_1 - xX_0$ est $f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(z-w) f_{-xX_0}(w) dw$, où l'intégrande est non nul seulement si $w < 0$ et $w < z$.

- Si $z \geq 0$: $f(z) = \frac{\lambda^2}{x} e^{-\lambda z} \int_{-\infty}^0 e^{\lambda w \frac{x+1}{x}} dw = \frac{\lambda^2}{x} e^{-\lambda z} \cdot \frac{x}{\lambda(x+1)}$.
- Si $z < 0$: $f(z) = \frac{\lambda^2}{x} e^{-\lambda z} \int_{-\infty}^z e^{\lambda w \frac{x+1}{x}} dw = \frac{\lambda}{x+1} e^{-\lambda z + \lambda z \frac{x+1}{x}}$.

$$f(z) = \frac{\lambda}{x+1} e^{\lambda z/x} \quad (z < 0), \quad f(z) = \frac{\lambda}{x+1} e^{-\lambda z} \quad (z \geq 0).$$

- c) Presque sûrement, $X_0 > 0$ et $X_1 > 0$, donc $T > 0$, et $F_T(x) = 0$ pour $x \leq 0$. Pour $x > 0$, on a $[T \leq x] = [X_1 - xX_0 \leq 0]$, d'où $F_T(x) = \int_{-\infty}^0 \frac{\lambda}{x+1} e^{\lambda z/x} dz = \frac{x}{x+1}$.

$$F_T(x) = 0 \quad (x \leq 0), \quad F_T(x) = \frac{x}{x+1} \quad (x > 0).$$

2. Loi de $X = \lfloor T \rfloor + 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $[X = n] = [n-1 \leq T < n]$. Comme F_T est continue, $\mathbb{P}(X = n) = F_T(n) - F_T(n-1) = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}$.

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

3. Le maximum Y_n .

- a) Par la question 1a) avec $x = 1$:

$$f_{-X_0}(t) = \lambda e^{\lambda t} \quad (t < 0), \quad 0 \quad (t \geq 0).$$

- b) Par indépendance, $G_n(x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x)^n$. G_n est continue, et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en 0.

$$G_n(x) = (1 - e^{-\lambda x})^n \quad (x \geq 0), \quad 0 \quad (x < 0);$$

$$g_n(x) = n\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} \quad (x > 0), \quad 0 \text{ sinon.}$$

- c) Y_n et $-X_0$ sont indépendantes (lemme des coalitions), et toutes deux à densité. Une densité de $Y_n - X_0$ est $h_n(x) = \int g_n(t)f_{-X_0}(x-t)dt$, et l'intégrande est non nul pour $t > 0$ et $t > x$. Pour $x < 0$:

$$h_n(x) = \lambda e^{\lambda x} \int_0^{+\infty} n \lambda e^{-2\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{n-1} dt.$$

On fait le changement de variable $u = 1 - e^{-\lambda t}$ (de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissant de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$, intégrales de même nature), avec $du = \lambda e^{-\lambda t} dt$ et $e^{-\lambda t} = 1 - u$:

$$\int_0^{+\infty} n \lambda e^{-2\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{n-1} dt = n \int_0^1 (1-u) u^{n-1} du = n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{n+1}.$$

$$\boxed{\forall x < 0, \quad h_n(x) = \frac{1}{n+1} \lambda e^{\lambda x}.$$

4. La variable Z .

- a) $\omega \in (Z > n) \cup (Z = 0)$ si et seulement si aucun des indices $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ne vérifie $X_k > X_0$, c'est-à-dire si et seulement si $X_k \leq X_0$ pour tout $k \leq n$, soit $Y_n \leq X_0$.

$$\boxed{(Z > n) \cup (Z = 0) = (Y_n \leq X_0).$$

- b) $(Z = 0)$ signifie $X_k \leq X_0$ pour tout $k \geq 1$, soit $Y_k \leq X_0$ pour tout k . La suite $(Y_k \leq X_0)_k$ est décroissante (car $Y_{k+1} \geq Y_k$), et $\mathbb{P}(Y_k \leq X_0) = \mathbb{P}(Y_k - X_0 \leq 0) = \int_{-\infty}^0 h_k = \frac{1}{k+1}$. Par le théorème de la limite monotone :

$$\boxed{(Z = 0) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} (Y_k \leq X_0), \quad \mathbb{P}(Z = 0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k+1} = 0.$$

- c) L'union de a) est disjointe, donc, pour $n \geq 1$, $\mathbb{P}(Z > n) = \frac{1}{n+1}$. Cette formule vaut aussi pour $n = 0$, car $\mathbb{P}(Z > 0) = 1 - \mathbb{P}(Z = 0) = 1$. Pour $n \geq 1$, on a donc $\mathbb{P}(Z = n) = \mathbb{P}(Z > n-1) - \mathbb{P}(Z > n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Z = n) = \frac{1}{n(n+1)} = \mathbb{P}(X = n).$$

5. Informatique.

- a) $U < 1$ presque sûrement, donc $V \geq 0$. Pour $x \geq 0$, $[V \leq x] = [\ln(1-U) \geq -\lambda x] = [U \leq 1 - e^{-\lambda x}]$, donc $F_V(x) = F_U(1 - e^{-\lambda x}) = 1 - e^{-\lambda x}$, puisque $1 - e^{-\lambda x} \in [0, 1[$. Pour $x < 0$, $F_V(x) = 0$.

$$\boxed{F_V(x) = F_U(1 - e^{-\lambda x}) \quad (x \geq 0) \quad \text{et} \quad V \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda).$$

- b) On simule X_0 , puis les X_k successifs jusqu'au premier qui dépasse X_0 ; la boucle s'arrête presque sûrement, car $\mathbb{P}(Z = 0) = 0$.

def z(lamb):

 x0 = -np.log(1 - rd.random()) / lamb

 k = 1

 while -np.log(1 - rd.random()) / lamb <= x0:

 k = k + 1

 return k

Exercice 3

Exercice 3 – Reste modulo $1 + X^3$

$f(P)$ est le reste de la division de $(1 - X + X^2)P$ par $1 + X^3$.

Corrigé – Exercice 3.

1. Linéarité.

Si $(1 - X + X^2)P_i = (1 + X^3)Q_i + f(P_i)$ pour $i = 1, 2$, alors

$$(1 - X + X^2)(\lambda P_1 + P_2) = (1 + X^3)(\lambda Q_1 + Q_2) + \lambda f(P_1) + f(P_2),$$

avec $\deg(\lambda f(P_1) + f(P_2)) \leq 2$. Par unicité du reste, $f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda f(P_1) + f(P_2)$.

$$f \in \mathcal{L}(E).$$

2. Image et noyau.

a) On a $f(e_0) = 1 - X + X^2$. Ensuite, $(1 - X + X^2)X = X - X^2 + X^3 = (1 + X^3) \cdot 1 + (-1 + X - X^2)$. Enfin, $(1 - X + X^2)X^2 = X^2 - X^3 + X^4 = (1 + X^3)(X - 1) + (1 - X + X^2)$.

$$f(e_0) = f(e_2) = 1 - X + X^2, \quad f(e_1) = -1 + X - X^2.$$

Donc $f(e_0) = -f(e_1) = f(e_2)$.

b) $\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_0), f(e_1), f(e_2)) = \text{Vect}(1 - X + X^2)$.

$$\text{Base de Im } f : (1 - X + X^2).$$

c) Par le théorème du rang, $\dim \ker f = 3 - 1 = 2$. On a $f(e_0 - e_2) = 0$ et $f(e_0 + e_1) = 0$, et ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

$$\dim \ker f = 2, \quad \text{base } (1 - X^2, 1 + X).$$

3. Diagonalisation.

a) On écrit $P = c(1 - X + X^2) = c(e_0 - e_1 + e_2)$. Alors $f(P) = c(f(e_0) - f(e_1) + f(e_2)) = 3c(1 - X + X^2) = 3P$. Ainsi $\text{Im } f \subset \ker(f - 3\text{Id})$, et 3 est valeur propre, avec le vecteur propre $1 - X + X^2 \neq 0$. De plus, $\ker f \cap \ker(f - 3\text{Id}) = \{0\}$, donc $\dim \ker(f - 3\text{Id}) \leq 3 - 2 = 1$.

$$\forall P \in \text{Im } f, f(P) = 3P ; \quad 3 \in \text{Sp}(f) ; \quad \text{Im } f = \ker(f - 3\text{Id}).$$

b) La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $\dim \ker f + \dim \ker(f - 3\text{Id}) = 2 + 1 = 3$.

$$f \text{ est diagonalisable.}$$

4. Produit scalaire.

a) φ est symétrique, et bilinéaire (les coordonnées sont linéaires). On a $\varphi(P, P) = \sum a_k^2 \geq 0$, avec égalité si et seulement si $P = 0$.

$$\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.$$

- b) $\varphi(1 - X^2, 1 - X + X^2) = 1 - 1 = 0$ et $\varphi(1 + X, 1 - X + X^2) = 1 - 1 = 0$. Donc $\ker f \subset (\operatorname{Im} f)^\perp$. Comme $\dim(\operatorname{Im} f)^\perp = 3 - 1 = 2 = \dim \ker f$, il y a égalité.

$$\ker f = (\operatorname{Im} f)^\perp.$$

5. Matrice symétrique.

- a) $\varphi(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ par définition.

$$\mathcal{B} \text{ est orthonormale pour } \varphi.$$

- b) Par 2a), on obtient la matrice ci-dessous. C'est une matrice symétrique dans une base orthonormale : f est un endomorphisme symétrique. Par le théorème spectral, ses sous-espaces propres sont orthogonaux, et l'on retrouve $\ker f \perp \ker(f - 3\operatorname{Id}) = \operatorname{Im} f$, c'est-à-dire le résultat de 4b).

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problème

Problème – Inégalité de Carleman

$$x_n \geq 0, \sum x_n \text{ convergente}, y_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n i x_i, z_n = (\prod_{k=1}^n x_k)^{1/n}.$$

Corrigé – Problème.

1. La série $\sum y_n$.

- a) On intervertit les sommes finies ($1 \leq i \leq k \leq n$), puis on télescope :

$$\sum_{k=1}^n y_k = \sum_{i=1}^n i x_i \sum_{k=i}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{i=1}^n i x_i \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (n+1-i) x_i.$$

$$\text{De même, } \sum_{k=1}^n S_k = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^n (n+1-i) x_i.$$

$$\sum_{k=1}^n y_k = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (n+1-i) x_i = T_n.$$

- b) $S_n \rightarrow S = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k$. Par le résultat admis, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k \rightarrow S$, et $T_n = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k \rightarrow S$.

$$\sum y_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

2. L'inégalité $\sum z_n \leq e \sum x_n$.

- a) Si l'un des a_k est nul, le membre de gauche est nul et l'inégalité est vraie. Sinon, on

applique le résultat admis à $\ln$, concave sur $]0, +\infty[$: $\frac{1}{n} \sum \ln a_k \leq \ln \left(\frac{1}{n} \sum a_k \right)$. On conclut par croissance de $\exp$.

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

- b) On a $\prod_{k=1}^n kx_k = n! \prod_{k=1}^n x_k$, d'où la première égalité. Par a) avec $a_k = kx_k$, $(\prod kx_k)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n kx_k = (n+1)y_n$.

$$z_n = \frac{1}{(n!)^{1/n}} \left(\prod_{k=1}^n kx_k \right)^{1/n} \leq \frac{n+1}{(n!)^{1/n}} y_n.$$

- c) $u \mapsto \ln(1+u)$ est concave sur $] -1, +\infty[$: sa courbe est sous sa tangente en 0, qui est $y = u$.

$$\forall x \geq 0, \quad \ln(1+x) \leq x.$$

- d) $n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \leq n \cdot \frac{1}{n} = 1$, puis on compose par $\exp$, qui est croissante.

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \leq e.$$

- e) On a $\prod_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{k} \right)^k = \frac{\prod_{k=1}^n (k+1)^k}{\prod_{k=1}^n k^k} = \frac{\prod_{j=2}^{n+1} j^{j-1}}{\prod_{j=1}^n j^j} = (n+1)^n \prod_{j=1}^n \frac{j^{j-1}}{j^j}.$

$$\frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k.$$

Par d), $\frac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n$, donc $\frac{n+1}{(n!)^{1/n}} = \left(\frac{(n+1)^n}{n!} \right)^{1/n} \leq e$. Par b), $0 \leq z_n \leq ey_n$. Par comparaison (termes positifs) et 1b) :

$$\sum z_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} y_n = e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

3. Équivalent de $(n!)^{-1/n}$.

- a) $\ln$ est croissante sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right]$, intervalle de longueur $\frac{1}{n}$. Par croissance de l'intégrale :

$$\frac{1}{n} \ln \left(\frac{k}{n} \right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln x \, dx \leq \frac{1}{n} \ln \left(\frac{k+1}{n} \right).$$

- b) Avec la primitive $x \ln x - x$:

$$\int_{1/n}^1 \ln x \, dx = -1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n}.$$

On somme a) pour k de 1 à $n-1$ (relation de Chasles), et on note $\Sigma_n = \sum_{k=1}^n \ln \frac{k}{n}$ (le terme $k=n$ est nul) :

$$\frac{1}{n} \Sigma_n \leq -1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \ln \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \Sigma_n + \frac{\ln n}{n}.$$

$$-1 + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k}{n} \right) \leq -1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n}.$$

- c) Par encadrement (croissances comparées pour $\frac{\ln n}{n}$), $\frac{1}{n} \sum_n \rightarrow -1$. Or $\frac{1}{n} \sum_n = \frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n}$, d'où $\ln \left((n!)^{-1/n} \right) = -\frac{1}{n} \sum_n - \ln n = 1 - \ln n + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Ainsi $\frac{(n!)^{-1/n}}{e/n} = e^{\varepsilon_n} \rightarrow 1$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k}{n} \right) = -1, \quad \left(\frac{1}{n!} \right)^{1/n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{n}.$$

4. Une famille d'exemples.

- a) Pour $n \leq N$, $z_n(N) = \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)^{1/n} = (n!)^{-1/n}$. Pour $n > N$, le produit contient un facteur nul, donc $z_n(N) = 0$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n!} \right)^{1/n}.$$

- b) Les séries à termes positifs $\sum (n!)^{-1/n}$ et $\sum \frac{e}{n}$ ont des termes équivalents (3c) et divergent (série harmonique). Par le résultat admis, leurs sommes partielles sont équivalentes : $\sum_{n=1}^N (n!)^{-1/n} \sim e \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$.

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_n z_n(N)}{\sum_n x_n(N)} = e.$$

5. Optimalité de la constante.

Par 2, la constante e convient. Si λ convient, on l'applique aux suites $(x_n(N))$ (positives, de série convergente) : $\frac{\sum z_n(N)}{\sum x_n(N)} \leq \lambda$ pour tout N . Par passage à la limite (4b), $e \leq \lambda$.

$$e \text{ est la plus petite constante } \lambda \text{ telle que } \sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$