

Année : 2012

École : EDHEC

Option : Mathématiques approfondies

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Sommaire

Exercice 1 : <i>Thèmes abordés : réduction ; applications linéaires</i>	1
Exercice 2 : <i>Thèmes abordés : Probabilité discrètes ; variables à densité ; Python</i>	1
Exercice 3 : <i>Thèmes abordés : applications linéaires ; réduction ; algèbre bilinéaire</i>	2
Exercice 4 : <i>Thèmes abordés : suites ; séries ; intégrales</i>	3

Exercice 1

Thèmes abordés : réduction ; applications linéaires

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

- 1) **a)** Calculer A^2 et A^3 , puis déterminer un polynôme annulateur de f .
 b) En déduire les valeurs propres de f .
 c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
- 2) Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 3) **a)** Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f^2) \oplus \ker(f - 2\text{Id})$.
 b) On veut montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $g^2 = f$.
 On suppose pour cela qu'un tel endomorphisme existe. Établir que $\ker(f^2)$ est stable par g , puis montrer que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$G = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}.$$

En utilisant la matrice de f dans cette même base, trouver une contradiction et conclure.

- 4) Étude d'un cas plus général.

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$ (où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1) et on désigne par α un réel non nul.

- a)** On considère un endomorphisme h de $\mathbb{R}^n$ et on suppose que $h^n = \alpha h^{n-1}$. Montrer que

$$\mathbb{R}^n = \ker(h^{n-1}) \oplus \ker(h - \alpha \text{Id}).$$

- b)** Montrer réciproquement que, si un endomorphisme h de $\mathbb{R}^n$ est tel que $\mathbb{R}^n = \ker(h^{n-1}) \oplus \ker(h - \alpha \text{Id})$, alors $h^n = \alpha h^{n-1}$.

Exercice 2

Thèmes abordés : Probabilité discrètes ; variables à densité ; Python

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

- 1) a) Donner, pour tout réel x strictement positif, une densité de $-xX_0$.
 b) Montrer que l'on peut choisir comme densité de $X_1 - xX_0$ la fonction f définie par

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\lambda}{x+1} e^{\lambda z/x} & \text{si } z < 0, \\ \frac{\lambda}{x+1} e^{-\lambda z} & \text{si } z \geq 0. \end{cases}$$

- c) On pose $T = \frac{X_1}{X_0}$ et on admet que T est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Déterminer la fonction de répartition F_T de la variable aléatoire T .
 2) On pose $X = \lfloor T \rfloor + 1$, où $\lfloor T \rfloor$ désigne la partie entière de T . On admet également que X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

- 3) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose $Y_n = \sup(X_1, \dots, X_n)$ et on admet que Y_n est une variable aléatoire à densité définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- a) Donner sans calcul une densité de $-X_0$.
 b) Déterminer la fonction de répartition G_n de Y_n et en déduire une densité g_n de Y_n .
 c) En déduire qu'il existe une densité h_n de $Y_n - X_0$ telle que

$$\forall x < 0, \quad h_n(x) = \frac{1}{n+1} \lambda e^{\lambda x}.$$

- 4) On note Z la variable aléatoire définie par

$$Z = \inf\{k \in \mathbb{N}^* : X_k > X_0\}$$

si cet ensemble n'est pas vide, et $Z = 0$ si cet ensemble est vide.

- a) Établir que, pour tout entier naturel n non nul,

$$(Z > n) \cup (Z = 0) = (Y_n \leq X_0).$$

- b) Montrer que

$$(Z = 0) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} (Y_k \leq X_0),$$

puis établir que $P(Z = 0) = 0$.

- c) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, les événements $(Z = n)$ et $(X = n)$ ont même probabilité.

- 5) Informatique.

- a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$. On pose

$$V = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$$

et on admet que V est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de V en fonction de celle de U , puis en déduire la loi suivie par la variable aléatoire V .

- b) Écrire en Python une fonction d'en-tête `def z(lamb):` qui simule la loi de Z . On pourra utiliser les fonctions `random()` du module `random` et `log()` du module `math`.

Exercice 3

Thèmes abordés : applications linéaires ; réduction ; algèbre bilinéaire

On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. On note e_0, e_1 et e_2 les polynômes de E définis par $e_0 = 1$, $e_1 = X$ et $e_2 = X^2$. On rappelle que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E .

On considère l'application f qui, à tout polynôme P de E , associe le reste de la division par $1 + X^3$ du polynôme $(1 - X + X^2)P$. Ainsi, il existe un unique polynôme Q tel que

$$(1 - X + X^2)P = (1 + X^3)Q + f(P), \quad \deg(f(P)) \leq 2.$$

- 1) Montrer que f est un endomorphisme de E .
- 2)
 - a) Déterminer $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ puis vérifier que $f(e_0) = -f(e_1) = f(e_2)$.
 - b) En déduire une base de $\text{Im}(f)$.
 - c) Donner la dimension de $\ker(f)$ ainsi qu'une base de $\ker(f)$.
- 3)
 - a) Calculer $f(P)$ pour tout polynôme P de $\text{Im}(f)$, puis établir que 3 est valeur propre de f et que $\text{Im}(f) = \ker(f - 3\text{Id})$.
 - b) Montrer que f est diagonalisable.
- 4) On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout couple (P, Q) de polynômes de E , associe le réel

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^2 a_k b_k,$$

où l'on a noté $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$.

- a) Vérifier que φ est un produit scalaire défini sur E .
 - b) Vérifier que $\ker(f)$ est le supplémentaire orthogonal de $\text{Im}(f)$ dans E pour le produit scalaire φ .
- 5)
 - a) Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale pour le produit scalaire φ .
 - b) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, puis retrouver le résultat de la question 4b).

Exercice 4

Thèmes abordés : suites ; séries ; intégrales

Résultat admis

Si une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers ℓ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \ell.$$

Dans toute la suite, on considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels positifs telle que la série de terme général x_n converge. Pour tout entier naturel n non nul, on note

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k, \quad T_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n S_k \quad \text{et} \quad y_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n i x_i.$$

1) a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n y_k = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (n+1-i)x_i.$$

En déduire ensuite que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n y_k = T_n$.

b) En utilisant le résultat admis au début de cet exercice, établir que la série de terme général y_n converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

2) Dans cette question, on pose, pour tout entier naturel n non nul,

$$z_n = \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n}.$$

On se propose de montrer que la série de terme général z_n converge et que sa somme vérifie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

a) On admet que si une fonction f est concave sur un intervalle I , alors, pour tout entier naturel n non nul,

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in I^n, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(a_k) \leq f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k\right).$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

b) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul,

$$z_n = \frac{1}{(n!)^{1/n}} \left(\prod_{k=1}^n k x_k \right)^{1/n}.$$

En déduire que

$$z_n \leq \frac{n+1}{(n!)^{1/n}} y_n.$$

c) Montrer que, pour tout réel x positif, $\ln(1+x) \leq x$.

d) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e.$$

e) Établir que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k.$$

Montrer enfin que la série de terme général z_n converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

3) a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$\frac{1}{n} \ln \left(\frac{k}{n} \right) \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln x \, dx \leq \frac{1}{n} \ln \left(\frac{k+1}{n} \right).$$

b) Calculer l'intégrale $\int_{1/n}^1 \ln x \, dx$ et en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \quad -1 + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k}{n} \right) \leq -1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n}.$$

c) Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k}{n} \right),$$

puis établir que

$$\left(\frac{1}{n!} \right)^{1/n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{n}.$$

4) On admet que si deux séries à termes positifs, de termes généraux équivalents, divergent, alors leurs sommes partielles d'ordre m sont équivalentes lorsque m est au voisinage de $+\infty$.

Soit N un entier naturel non nul quelconque. On considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ particulière, que l'on note $(x_n(N))_{n \in \mathbb{N}^*}$, définie par

$$x_n(N) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \in \{1, \dots, N\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose, comme à la deuxième question,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad z_n(N) = \left(\prod_{k=1}^n x_k(N) \right)^{1/n}.$$

a) Écrire $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)$ sous forme de sommes finies.

b) En déduire que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} = e.$$

c) Conclure que e est la plus petite des constantes λ telles que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$