

emlyon business school

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2012

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Problème 1

Problème 1 – Parties I et II – Interpolation et polynômes spéciaux

$\varphi(P) = (P(a_1), \dots, P(a_n))$; $E = \{P : P > 0 \text{ et } P' > 0 \text{ sur }]0, +\infty[\}$.

Corrigé – Problème 1.

Partie I

1. φ est un isomorphisme.

φ est linéaire. Si $\varphi(P) = 0$, P admet les n racines distinctes $a_1, \dots, a_n$ alors que $\deg P \leq n - 1 : P = 0$. Ainsi φ est injective, et $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n = \dim \mathbb{R}^n$.

φ est un isomorphisme.

2. Interpolation.

C'est la surjectivité et l'injectivité de φ appliquées à $(b_1, \dots, b_n)$.

$\exists! P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \forall i, P(a_i) = b_i.$

3. Exemple.

On écrit $P_0 = a + bX + cX^2 + dX^3$. Alors $a = 1$, et $b + c + d = 2$, $2b + 4c + 8d = 10$, $3b + 9c + 27d = 30$. Les deux dernières équations s'écrivent $b + 2c + 4d = 5$ et $b + 3c + 9d = 10$. Par différences successives avec $b + c + d = 2$, on obtient $c + 3d = 3$ et $c + 5d = 5$, d'où $d = 1$, $c = 0$, $b = 1$.

$P_0 = X^3 + X + 1.$

Partie II

1. Exemple.

$P = X + 1$ convient : $P(x) = x + 1 > 0$ et $P'(x) = 1 > 0$.

$X + 1 \in E.$

2. Stabilités.

Pour $x > 0$: $\alpha P(x) > 0$ et $\alpha P'(x) > 0$; $(P+Q)(x) > 0$ et $(P+Q)'(x) = P'(x) + Q'(x) > 0$; $(PQ)(x) > 0$ et $(PQ)'(x) = P'(x)Q(x) + P(x)Q'(x) > 0$. En revanche, $0 \notin E$.

$\alpha P, P + Q, PQ \in E$; E n'est pas un sous-espace vectoriel.

3. Primitive.

P_1 est un polynôme, et $P'_1 = P > 0$ sur $]0, +\infty[$. Ainsi P_1 est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, avec $P_1(0) = 0$, donc $P_1(x) > 0$ pour $x > 0$.

$$P_1 \in E.$$

4. Minoration.

P est continue sur $[0, +\infty[$ et $P' > 0$ sur $]0, +\infty[$: P est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

$$\forall x \geq 0, \quad P(x) \geq P(0).$$

5. Bijectivité de $\tilde{P}$.

P n'est pas constant (car $P' \neq 0$), et il est croissant sur $[0, +\infty[$: sa limite en $+\infty$ est $+\infty$ (un polynôme non constant tend vers $\pm\infty$, et la croissance exclut $-\infty$). $\tilde{P}$ est continue et strictement croissante. Par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[P(0), +\infty[$.

$$\tilde{P} \text{ est bijective.}$$

6. Réciproque polynomiale ?

On suppose $\deg P = d \geq 2$ et qu'il existe un polynôme R tel que $\tilde{P}^{-1}(y) = R(y)$ pour $y \geq P(0)$. Alors $P(R(y)) - y = 0$ pour une infinité de réels y , donc $P \circ R = X$. R n'est pas constant (sinon $P \circ R$ le serait), et $\deg(P \circ R) = d \deg R \geq 2$, ce qui contredit $\deg X = 1$.

$$\tilde{P}^{-1} \text{ n'est pas polynomiale si } \deg P \geq 2.$$

Problème 1 – Parties III et IV – Racine P -ième d'une matrice symétrique positive

$S_n^+ = \{A \text{ symétrique} : \forall U, {}^tUAU \geq 0\}$; équation $P(S) = A$.

Corrigé – Problème 1.**Partie III****1. Diagonalisabilité.**

Par le théorème spectral, toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale : $A = R \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) {}^tR$ avec R orthogonale.

$$A \text{ est diagonalisable (dans une base orthonormale).}$$

2. Caractérisation spectrale.

a) Si $AU = \mu U$ avec $U \neq 0$, alors $0 \leq {}^tUAU = \mu {}^tUU = \mu \|U\|^2$, et $\|U\|^2 > 0$.

$$A \in S_n^+ \implies \operatorname{Sp}(A) \subset [0, +\infty[.$$

- b) Avec les notations de 1, on pose $V = {}^tRU$. Alors ${}^tUAU = {}^tV \operatorname{diag}(\mu_i)V = \sum_i \mu_i v_i^2 \geq 0$.

$$\boxed{\operatorname{Sp}(A) \subset [0, +\infty[\implies A \in S_n^+.$$

Partie IV

1. Analyse.

- a) S commute avec toute puissance de S , donc avec $P(S) = A$. Ensuite,

$$\Delta D = Q^{-1}SQ Q^{-1}AQ = Q^{-1}SAQ = Q^{-1}ASQ = D\Delta.$$

$$\boxed{SA = AS \quad \text{et} \quad \Delta D = D\Delta.}$$

- b) Le coefficient (i, j) de $\Delta D - D\Delta$ vaut $\Delta_{ij}(\lambda_j - \lambda_i)$. Il est nul, et $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$, donc $\Delta_{ij} = 0$. En notant $\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n)$, on a $S(Qe_i) = Q\Delta e_i = \delta_i Qe_i$ avec $Qe_i \neq 0$: δ_i est une valeur propre de $S \in S_n^+$, donc $\delta_i \geq 0$ (III.2a).

$$\boxed{\Delta = \operatorname{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n) \quad \text{avec} \quad \delta_i \geq 0.}$$

2. Existence et unicité.

Unicité. Si S est solution, on a $A = P(S) = QP(\Delta)Q^{-1}$, donc $P(\Delta) = D$, soit $P(\delta_i) = \lambda_i$ avec $\delta_i \geq 0$. Ainsi $\delta_i = \tilde{P}^{-1}(\lambda_i)$, et $S = Q\Delta Q^{-1}$ est entièrement déterminée.

Existence. On pose $\Delta = \operatorname{diag}(\tilde{P}^{-1}(\lambda_1), \dots, \tilde{P}^{-1}(\lambda_n))$ et $S = Q\Delta Q^{-1}$. Par la partie I (les λ_i sont distincts), il existe un polynôme R tel que $R(\lambda_i) = \tilde{P}^{-1}(\lambda_i)$ pour tout i . Alors $R(D) = \Delta$ et $S = QR(D)Q^{-1} = R(A)$. C'est une matrice symétrique, car combinaison linéaire de puissances de la matrice symétrique A . Ses valeurs propres $\tilde{P}^{-1}(\lambda_i)$ sont positives, donc $S \in S_n^+$ (III.2b). Enfin, $P(S) = QP(\Delta)Q^{-1} = QDQ^{-1} = A$.

$$\boxed{\text{Unique solution } S = Q\Delta Q^{-1}, \quad \Delta = \operatorname{diag}(\tilde{P}^{-1}(\lambda_1), \dots, \tilde{P}^{-1}(\lambda_n)).}$$

3. Exemple.

- a) Pour $x > 0$, $P(x) = x^3 + x + 1 > 0$ et $P'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, et $\deg P = 3 = n - 1$.

$$\boxed{P \in E.}$$

- b) A est diagonale par blocs. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ admet les valeurs propres 1 et 3, de vecteurs propres $(1, 1)$ et $(1, -1)$. $\begin{pmatrix} 21 & 10 \\ 10 & 21 \end{pmatrix}$ admet les valeurs propres 11 et 31, de vecteurs propres $(1, -1)$ et $(1, 1)$. Ces quatre valeurs propres sont distinctes et positives, et A est symétrique. Par III.2b, $A \in S_4^+$; ses valeurs propres sont toutes supérieures ou égales à $P(0) = 1$. On norme les vecteurs propres, qui sont deux à deux orthogonaux.

$$\boxed{\operatorname{Sp}(A) = \{1, 3, 11, 31\}, \quad A \in S_4^+,}$$

$$\boxed{D = \operatorname{diag}(1, 3, 11, 31), \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- c) Par la partie I, $P = P_0$ vérifie $P(0) = 1$, $P(1) = 3$, $P(2) = 11$, $P(3) = 31$. Donc $\tilde{P}^{-1}(1) = 0$, $\tilde{P}^{-1}(3) = 1$, $\tilde{P}^{-1}(11) = 2$ et $\tilde{P}^{-1}(31) = 3$. Ainsi $\Delta = \text{diag}(0, 1, 2, 3)$ et $S = Q\Delta^t Q$. Le calcul bloc par bloc donne :

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \text{ est l'unique solution dans } S_4^+.$$

Problème 2

Problème 2 – Partie I – Formule de Stirling

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt.$$

Corrigé – Problème 2.

1. Premières valeurs.

$$W_0 = \frac{\pi}{2}, \quad W_1 = [\sin t]_0^{\pi/2} = 1.$$

2. Monotonie et positivité.

- a) Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \cos t \leq 1$, donc $(\cos t)^{n+1} \leq (\cos t)^n$. Par croissance de l'intégrale :

$$(W_n) \text{ est décroissante.}$$

- b) $t \mapsto (\cos t)^n$ est continue, positive, non identiquement nulle (elle vaut 1 en 0), et les bornes sont dans l'ordre croissant.

$$W_n > 0.$$

3. Relation de récurrence.

- a) On intègre par parties sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, avec $u = (\cos t)^{n+1}$ et $v = \sin t$ (de classe $\mathcal{C}^1$) :

$$W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+1} \cos t dt = \left[(\cos t)^{n+1} \sin t \right]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \sin^2 t dt.$$

Le crochet est nul, et $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$, donc $W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2})$.

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

- b) La suite $v_n = (n+1)W_{n+1}W_n$ vérifie $v_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1} = v_n$. Elle est constante, égale à v_0 .

$$(n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}.$$

4. Équivalent de W_n .

a) Par décroissance, $W_n \geq W_{n+1} \geq W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$.

$$W_n \geq W_{n+1} \geq \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

b) On divise par $W_n > 0$: $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$. Par encadrement, $\frac{W_{n+1}}{W_n} \rightarrow 1$. Alors, par 3b, $W_n^2 = \frac{\pi}{2(n+1)} \cdot \frac{W_n}{W_{n+1}} \sim \frac{\pi}{2n}$, et $W_n > 0$.

$$W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_n, \quad W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

5. Valeur de W_{2n} .

Par récurrence. Pour $n = 0$, la formule donne $\frac{\pi}{2} = W_0$. Si elle est vraie au rang n , alors, par 3a,

$$W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n+2)^2} \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

6. Convergence de $\sum a_n$.

Avec $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ et $x = \frac{1}{n}$:

$$\left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = -1 - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc $a_n \sim \frac{1}{12n^2}$. Les termes sont positifs à partir d'un certain rang, et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Par le critère d'équivalence :

$$\sum_{n \geq 2} a_n \text{ converge.}$$

7. Télescopage.

$\ln A_n = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n - \ln(n!)$. Avec $\ln(n!) - \ln((n-1)!) = \ln n$:

$$\begin{aligned} \ln A_n - \ln A_{n-1} &= (n-1)(\ln n - \ln(n-1)) - 1 + \frac{1}{2}(\ln n - \ln(n-1)) \\ &= -\left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - 1. \end{aligned}$$

$$a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1}).$$

8. Limite de (A_n) .

On a $\ln A_n = \ln A_1 + \sum_{k=2}^n a_k$, qui converge vers un réel L par 6. Par continuité de $\exp$:

$$A_n \rightarrow \ell = e^L > 0.$$

9. Formule de Stirling.

a) $\frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!} = A_n \rightarrow \ell \neq 0.$

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ell} n^n e^{-n} \sqrt{n}.$$

b) Par a), $(2n)! \sim \frac{1}{\ell} (2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n}$ et $(n!)^2 \sim \frac{1}{\ell^2} n^{2n} e^{-2n} n$. Donc

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \sim \frac{\pi \ell \sqrt{2}}{2\sqrt{n}}.$$

Or, par 4b, $W_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$. Par unicité de la limite du quotient, $\pi \ell \sqrt{2} = \sqrt{\pi}$.

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Problème 2 – Partie II – Loi de Rayleigh et paradoxe des anniversaires

$$f_a(x) = \frac{x}{a^2} e^{-x^2/(2a^2)} \text{ pour } x > 0.$$

Corrigé – Problème 2.**1. Densité.**

f_a est positive, continue sur $\mathbb{R}$ (y compris en 0, car $f_a(x) \rightarrow 0$). Pour $A > 0$, on a $\int_0^A f_a = \left[-e^{-x^2/(2a^2)} \right]_0^A = 1 - e^{-A^2/(2a^2)} \rightarrow 1$.

f_a est une densité.

2. Fonction de répartition.

Par le calcul précédent :

$$F_X(x) = 0 \text{ (} x \leq 0 \text{)}, \quad F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \text{ (} x > 0 \text{)}.$$

3. Espérance.

Soit $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0, a^2)$, de densité $\varphi_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2a^2)}$. On a $x f_a(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} x^2 \varphi_a(x)$ pour $x > 0$. Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi_a = \mathbb{E}(N^2) = a^2$ converge, et par parité, $\int_0^{+\infty} x f_a(x) dx$ converge absolument et vaut $\frac{\sqrt{2\pi}}{a} \cdot \frac{a^2}{2}$.

$$\mathbb{E}(X) = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

4. Variance.

On calcule $\int_0^A x^2 f_a(x) dx$ par intégration par parties sur un segment, avec $u = x^2$ et $v = -e^{-x^2/(2a^2)}$:

$$\int_0^A x^2 f_a = \left[-x^2 e^{-x^2/(2a^2)} \right]_0^A + \int_0^A 2x e^{-x^2/(2a^2)} dx \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0 + 2a^2 \int_0^{+\infty} f_a = 2a^2.$$

Par Koenig-Huygens, $\mathbb{V}(X) = 2a^2 - \frac{\pi a^2}{2}$.

$$\mathbb{E}(X^2) = 2a^2, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{4 - \pi}{2} a^2.$$

5. Simulation.

a) $V \in]0, 1]$, donc $Z \geq 0$. Pour $z > 0$, $[Z \leq z] = [-2 \ln V \leq \frac{z^2}{a^2}] = [V \geq e^{-z^2/(2a^2)}]$, d'où $\mathbb{P}(Z \leq z) = 1 - e^{-z^2/(2a^2)}$. Pour $z \leq 0$, $\mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(V = 1) = 0$.

Z a même fonction de répartition, donc même loi, que X .

b) `rd.random()` suit la loi uniforme sur $[0, 1[$, donc `1 - rd.random()` suit la loi uniforme sur $]0, 1]$.

```
def simulX(a):
    v = 1 - rd.random()
    return a * np.sqrt(-2 * np.log(v))
```

6. Majoration de T_n .

Parmi $n + 1$ tirages dans une urne de n boules, deux numéros coïncident (principe des tiroirs). On s'arrête donc au plus tard au $(n + 1)$ -ième tirage.

$$\mathbb{P}(T_n > n + 1) = 0.$$

7. Loi de T_n .

Pour $1 \leq k \leq n$, $[T_n > k]$ signifie que les k premiers tirages donnent des numéros distincts. Par équiprobabilité des n^k k -listes, il y a $n(n-1) \cdots (n-k+1)$ cas favorables (vrai aussi pour $k = 0$).

$$\mathbb{P}(T_n > k) = \frac{n!}{(n-k)! n^k}.$$

8. Lien avec Y_n .

T_n est à valeurs entières. Si $y\sqrt{n} = k_n$, on a directement $[T_n > y\sqrt{n}] = [T_n > k_n]$. Sinon, $k_n < y\sqrt{n} < k_n + 1$, et $T_n > y\sqrt{n} \iff T_n \geq k_n + 1 \iff T_n > k_n$.

$$\mathbb{P}(Y_n > y) = \mathbb{P}(T_n > k_n).$$

9. Équivalent.

On a $k_n \leq y\sqrt{n}$, donc $\frac{k_n}{n} \rightarrow 0$, $k_n \leq n$ pour n grand, et $n - k_n \rightarrow +\infty$. Par la formule de Stirling (I.9b), appliquée à $n!$ et à $(n - k_n)!$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_n > k_n) &\sim \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{(n - k_n)^{n - k_n} e^{-(n - k_n)} \sqrt{2\pi(n - k_n)} n^{k_n}} \\ &= e^{-k_n} \left(1 - \frac{k_n}{n}\right)^{k_n - n} \left(1 - \frac{k_n}{n}\right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Le dernier facteur tend vers 1.

$$\mathbb{P}(Y_n > y) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-k_n} \left(1 - \frac{k_n}{n}\right)^{k_n - n}.$$

10. Passage à la limite.

a) Avec $\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, on a $(t-1)\ln(1-t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, d'où :

$$-t + (t-1)\ln(1-t) = -\frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

b) En posant $t_n = \frac{k_n}{n} \rightarrow 0$, la quantité étudiée vaut $n(-t_n + (t_n-1)\ln(1-t_n)) = -\frac{k_n^2}{2n} + o\left(\frac{k_n^2}{n}\right)$. Or $y\sqrt{n} - 1 < k_n \leq y\sqrt{n}$, donc $\frac{k_n^2}{n} \rightarrow y^2$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-k_n + (k_n - n) \ln \left(1 - \frac{k_n}{n} \right) \right) = -\frac{y^2}{2}.$$

11. Convergence en loi.

Pour $y \geq 0$, on a $e^{-k_n} \left(1 - \frac{k_n}{n} \right)^{k_n - n} = \exp \left(-k_n + (k_n - n) \ln \left(1 - \frac{k_n}{n} \right) \right) \rightarrow e^{-y^2/2}$. Par 9, il vient $\mathbb{P}(Y_n \leq y) \rightarrow 1 - e^{-y^2/2}$. Pour $y < 0$, $\mathbb{P}(Y_n \leq y) = 0$. La limite est la fonction de répartition F_X pour $a = 1$, en tout point.

$$Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y, \quad \text{où } Y \text{ a pour densité } f_1 : x \mapsto xe^{-x^2/2} \ (x > 0), \ 0 \ (x \leq 0).$$