

Année : 2012

École : EML

Option : Mathématiques approfondies

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Sommaire

Problème 1 : *Thèmes abordés : espaces vectoriels ; applications linéaires ; fonctions d'une variable ; réduction ; algèbre bilinéaire* **2**

Problème 2 : *Thèmes abordés : intégrales ; suites ; séries ; variables à densité ; convergences de variables ; Python* **5**

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Problème 1

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; applications linéaires ; fonctions d'une variable ; réduction ; algèbre bilinéaire

Dans tout le problème, n est un entier tel que $n \geq 2$.

On confond polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$, sur $[0; +\infty[$ ou sur $]0; +\infty[$.

On note $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

Partie I — Interpolation polynomiale

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. On note

$$\varphi : \mathbb{R}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad P \longmapsto \varphi(P) = (P(a_1), \dots, P(a_n)).$$

- 1) Montrer que φ est un isomorphisme.
- 2) En déduire que, pour tout $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ unique tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad P(a_i) = b_i.$$

- 3) *Exemple* : déterminer le polynôme P_0 de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que

$$P_0(0) = 1, \quad P_0(1) = 3, \quad P_0(2) = 11, \quad P_0(3) = 31.$$

Partie II — Polynômes spéciaux

On considère l'ensemble E des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad P(x) > 0 \quad \text{et} \quad P'(x) > 0.$$

- 1) Donner un exemple d'élément de E .
- 2) Montrer que E est stable par multiplication par un réel strictement positif, par addition et par multiplication, c'est-à-dire que, pour tout $\alpha \in]0; +\infty[$ et tous $P, Q \in E$, on a

$$\alpha P \in E, \quad P + Q \in E, \quad PQ \in E.$$

Est-ce que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$?

- 3) Soit $P \in E$. On note

$$P_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \int_0^x P(t) \, dt.$$

Montrer que $P_1 \in E$.

4) Soit $P \in E$. Montrer :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad P(x) \geq P(0).$$

Pour tout $P \in E$, on note

$$\tilde{P} : [0; +\infty[\longrightarrow [P(0); +\infty[, \quad x \longmapsto \tilde{P}(x) = P(x).$$

5) Montrer que l'application $\tilde{P}$ est bijective.

6) Si, de plus, P est de degré au moins 2, est-ce que l'application réciproque $\tilde{P}^{-1}$ de $\tilde{P}$ est une application polynomiale ?

Partie III — Matrices symétriques positives

On note S_n^+ l'ensemble des matrices symétriques A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tUAU \geq 0.$$

Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 1) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Justifier.
- 2) a) Montrer que, si A est dans S_n^+ , alors toutes les valeurs propres de A sont dans $[0; +\infty[$.
 b) Réciproquement, montrer que, si toutes les valeurs propres de A sont dans $[0; +\infty[$, alors A est dans S_n^+ .

Partie IV — Matrice symétrique positive solution d'une équation polynomiale spéciale

Soit $P \in E$ de degré $n - 1$ (l'ensemble E a été défini dans la partie II), et soit $A \in S_n^+$ admettant n valeurs propres deux à deux distinctes, notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, appartenant toutes à $[P(0); +\infty[$.

On note D la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les termes diagonaux sont successivement $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, et Q une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = QDQ^{-1}$.

On se propose de résoudre l'équation $P(S) = A$, d'inconnue $S \in S_n^+$.

- 1) On suppose que l'équation $P(S) = A$ a une solution dans S_n^+ . Soit S appartenant à S_n^+ tel que $P(S) = A$. On note $\Delta = Q^{-1}SQ$.
 a) Montrer que $SA = AS$ et en déduire que $\Delta D = D\Delta$.
 b) Démontrer que Δ est diagonale et que les éléments diagonaux de Δ sont tous positifs ou nuls.
- 2) Établir que l'équation $P(S) = A$, d'inconnue $S \in S_n^+$, admet une solution et une seule, et que celle-ci est $Q\Delta Q^{-1}$, où Δ est une matrice diagonale que l'on exprimera à l'aide de $\tilde{P}^{-1}(\lambda_1), \dots, \tilde{P}^{-1}(\lambda_n)$, où $\tilde{P}$ a été définie dans la partie II.

3) *Exemple* : on prend ici $n = 4$, $P = X^3 + X + 1$ et

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 21 \end{pmatrix}.$$

- a)** Vérifier $P \in E$.
- b)** Déterminer les valeurs propres de A et montrer : $A \in S_4^+$.
- c)** Déterminer une matrice diagonale D et une matrice orthogonale Q telles que $A = QDQ^{-1}$.
- d)** Résoudre l'équation $P(S) = A$, d'inconnue $S \in S_4^+$.

Problème 2

Thèmes abordés : intégrales ; suites ; séries ; variables à densité ; convergences de variables ; Python

Partie I — Formule de Stirling

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt.$$

1) Calculer W_0 et W_1 .

2) a) Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 0$, que $W_n > 0$.

3) a) Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 0$:

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

b) En déduire, pour tout entier n tel que $n \geq 0$:

$$(n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0.$$

4) a) Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 0$:

$$W_n \geq W_{n+1} \geq \frac{n+1}{n+2}W_n.$$

b) En déduire :

$$W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_n, \quad \text{puis} \quad W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

5) Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 0$:

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

On note, pour tout entier n tel que $n \geq 1$:

$$A_n = \frac{1}{n!} n^n e^{-n} \sqrt{n}.$$

On note, pour tout entier n tel que $n \geq 2$:

$$a_n = -1 - \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

6) Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} a_n$ converge.

7) Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 2$:

$$a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1}).$$

8) En déduire que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite ℓ est strictement positive.

9) a) Justifier :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ell} n^n e^{-n} \sqrt{n}.$$

b) En utilisant l'expression de W_{2n} à l'aide de factorielles, en déduire la valeur de ℓ et l'équivalent suivant :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Partie II — Étude de variables aléatoires

Soit un réel a strictement positif et la fonction $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel x , par

$$f_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1) Montrer que f_a est une densité.

On considère une variable aléatoire X admettant f_a comme densité.

2) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X .

3) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et calculer $\mathbb{E}(X)$.

4) Montrer que la variable aléatoire X admet une variance $\mathbb{V}(X)$ et calculer $\mathbb{V}(X)$.

5) a) On considère une variable aléatoire V suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0; 1]$. Montrer que la variable aléatoire $Z = a\sqrt{-2\ln(V)}$ suit la même loi que la variable aléatoire X .

b) En déduire un programme en Python, utilisant le générateur aléatoire Python, simulant la variable aléatoire X , le réel a strictement positif étant entré par l'utilisateur.

Pour tout entier n tel que $n \geq 2$, on considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n . On effectue, dans U_n , des tirages d'une boule avec remise. On suppose que tous les tirages dans U_n sont équiprobables. On s'arrête dès que l'on obtient une boule déjà obtenue.

On note T_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

6) Justifier : $\mathbb{P}(T_n > n + 1) = 0$.

7) Déterminer, pour tout entier k tel que $k \leq n$:

$$\mathbb{P}(T_n > k).$$

On considère la variable aléatoire $Y_n = \frac{T_n}{\sqrt{n}}$. On se propose d'étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \geq 2}$.

Soit $y \in [0; +\infty[$. On note k_n l'entier naturel égal à la partie entière de $y\sqrt{n}$. On a donc :

$$k_n \leq y\sqrt{n} < 1 + k_n.$$

8) Justifier : $\mathbb{P}(Y_n > y) = \mathbb{P}(T_n > k_n)$.

9) En utilisant I 9.b, montrer :

$$\mathbb{P}(Y_n > y) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-k_n} \left(1 - \frac{k_n}{n}\right)^{k_n - n}.$$

10) a) Déterminer le développement limité d'ordre 2 de $t \mapsto -t + (t - 1) \ln(1 - t)$ en 0.

b) En déduire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-k_n + (k_n - n) \ln \left(1 - \frac{k_n}{n} \right) \right) = -\frac{y^2}{2}.$$

11) Montrer que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \geq 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on précisera une densité.