

ESSEC

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2012

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté. On note $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$ le produit scalaire canonique.

Question préliminaire et Partie I – Décomposition spectrale de ${}^tAA$

Partie I – Projecteurs orthogonaux et décomposition spectrale

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$; P_i projecteur orthogonal sur $E_{\lambda_i}({}^tAA)$.

Corrigé – Partie I.

1. Matrice d'un projecteur orthogonal.

$(U_1, \dots, U_k)$ est une base orthonormée de F , donc la projection orthogonale de X sur F est $\sum_{i=1}^k \langle U_i, X \rangle U_i = \sum_{i=1}^k U_i ({}^tU_i X)$. Enfin, ${}^t(U_i U_i) = U_i {}^tU_i$.

$$P = \sum_{i=1}^k U_i {}^tU_i \quad \text{et} \quad {}^tP = P.$$

2. Noyau et image de ${}^tAA$.

a) ${}^tA \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, donc ${}^tAA \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Si $AX = 0$, alors ${}^tAAX = 0$.

$${}^tAA \in M_n(\mathbb{R}), \quad \ker A \subset \ker({}^tAA).$$

b) Si ${}^tAAX = 0$, alors $\|AX\|_m^2 = {}^tX {}^tAAX = 0$, donc $AX = 0$. Par suite, $A = 0 \iff \ker A = M_{n,1}(\mathbb{R}) \iff \ker({}^tAA) = M_{n,1}(\mathbb{R}) \iff {}^tAA = 0$.

$$\ker A = \ker({}^tAA), \quad A = 0 \iff {}^tAA = 0.$$

c) On a $\text{Im}({}^tAA) = \{{}^tA(AX)\} \subset \text{Im} {}^tA$. Par le théorème du rang et b), $\text{rg}({}^tAA) = n - \dim \ker A = \text{rg } A = \text{rg } {}^tA$.

$$\text{Im } {}^tA = \text{Im}({}^tAA).$$

3. Décomposition spectrale.

a) ${}^tAA$ est symétrique réelle : elle est diagonalisable (théorème spectral). Si ${}^tAAX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, alors $\|AX\|_m^2 = {}^tX {}^tAAX = \lambda \|X\|_n^2$, donc $\lambda = \frac{\|AX\|_m^2}{\|X\|_n^2} \geq 0$.

$${}^tAA \text{ est diagonalisable et ses valeurs propres sont positives.}$$

- b) Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique sont deux à deux orthogonaux. Pour $i \neq j$, $P_j X \in E_{\lambda_j} \subset E_{\lambda_i}^\perp = \ker P_i$, donc $P_i P_j = 0$. Soit $X = \sum_j X_j$ avec $X_j \in E_{\lambda_j}$. Pour chaque i , $X - X_i = \sum_{j \neq i} X_j \in E_{\lambda_i}^\perp$, donc $P_i X = X_i$. D'où $X = \sum_i P_i X$ et ${}^t A A X = \sum_i \lambda_i X_i = \sum_i \lambda_i P_i X$.

$$P_i P_j = 0 \ (i \neq j), \quad I_n = \sum_{i=1}^p P_i, \quad {}^t A A = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i.$$

4. Exemples.

- a) On calcule ${}^t A A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. On trouve $\ker({}^t A A) = \text{Vect}((1, 1, 0))$ et $E_6 = \text{Vect}((1, -1, 0), (0, 0, 1))$, de dimension 2, d'où $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 6$. Par la question 1, avec la base orthonormée $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ de E_0 , on obtient P_1 , puis $P_2 = I_3 - P_1$.

$$P_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad {}^t A A = 0 \cdot P_1 + 6P_2.$$

- b) On note $a = A^t A = \sum a_i^2 > 0$. Alors $({}^t A A)^2 = {}^t A (A^t A) A = a {}^t A A : X^2 - aX$ est annulateur, donc $\text{Sp}({}^t A A) \subset \{0, a\}$. D'une part, ${}^t A A {}^t A = a {}^t A$ avec ${}^t A \neq 0$, donc a est valeur propre. D'autre part, si $n \geq 2$, $\ker({}^t A A) = \ker A$ est l'hyperplan orthogonal à ${}^t A$, donc 0 est valeur propre (si $n = 1$, seul a est valeur propre). Par la question 1 avec $U = \frac{{}^t A}{\sqrt{a}}$, le projecteur sur $E_a = \text{Vect}({}^t A)$ est $\frac{1}{a} {}^t A A$.

$$\text{Sp}({}^t A A) = \{0, a\} \ (n \geq 2), \quad {}^t A A = 0 \cdot \left(I_n - \frac{{}^t A A}{a} \right) + a \cdot \frac{{}^t A A}{a}, \quad a = A^t A.$$

Partie II – Pseudo-solution d'une équation linéaire

Partie II – Moindres carrés

X est pseudo-solution si $\|AX - B\| \leq \|AZ - B\|$ pour tout Z .

Corrigé – Partie II.

5. Cas compatible.

Soit X_0 une solution. Si X est une pseudo-solution, alors $\|AX - B\| \leq \|AX_0 - B\| = 0$, donc $AX = B$. Réciproquement, si $AX = B$, on a $\|AX - B\| = 0 \leq \|AZ - B\|$ pour tout Z .

$$X \text{ pseudo-solution} \iff AX = B.$$

6. Équation normale.

Avec $Z = X + \lambda Y$, on développe :

$$\|AX - B + \lambda AY\|^2 - \|AX - B\|^2 = \lambda^2 \|AY\|^2 + 2\lambda {}^tY^tA(AX - B).$$

Cette quantité est positive par définition d'une pseudo-solution.

$$\boxed{\lambda^2 \|AY\|^2 + 2\lambda {}^tY^tA(AX - B) \geq 0.}$$

On note $c = {}^tY^tA(AX - B)$. On divise par $\lambda > 0$ puis par $\lambda < 0$, et on fait tendre λ vers 0 : $c \geq 0$ et $c \leq 0$, donc $c = 0$. Avec $Y = {}^tA(AX - B)$, on obtient $\|{}^tA(AX - B)\|^2 = 0$.

$$\boxed{{}^tAAX = {}^tAB.}$$

7. Réciproque et existence.

Si ${}^tA(AX - B) = 0$, alors, pour tout Z ,

$$\|AZ - B\|^2 = \|A(Z - X)\|^2 + 2{}^t(Z - X){}^tA(AX - B) + \|AX - B\|^2 \geq \|AX - B\|^2.$$

De plus, ${}^tAB \in \text{Im } {}^tA = \text{Im } ({}^tAA)$ (2c) : l'équation ${}^tAAX = {}^tAB$ a au moins une solution.

$$\boxed{X \text{ pseudo-solution} \iff {}^tAAX = {}^tAB ; \text{ il existe toujours une pseudo-solution.}}$$

8. Exemple.

On calcule ${}^tAB = (3, -3, 6)$. Le système ${}^tAAX = {}^tAB$ s'écrit $3x - 3y = 3$, $6z = 6$, soit $z = 1$, $x = 1 + y$. On minimise $\|X_t\|^2 = (1 + t)^2 + t^2 + 1$, minimal pour $t = -\frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Pseudo-solutions : } X_t = (1 + t, t, 1), t \in \mathbb{R} ; \quad \text{norme minimale : } S = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right).}$$

9. Unicité.

Par 7, l'ensemble des pseudo-solutions est $X_0 + \ker({}^tAA) = X_0 + \ker A$. Il est réduit à un point si et seulement si $\ker A = \{0\}$.

$$\boxed{\text{Unique pseudo-solution} \iff \text{rg } A = n.}$$

Partie III – Pseudo-inverse d'une matrice**Partie III – La pseudo-inverse A^+**

S est la pseudo-solution de norme minimale ; $A^+B = S$.

Corrigé – Partie III.**10. Pseudo-solution de norme minimale.**

On note $K = \ker({}^tAA)$ et X_0 une pseudo-solution. Les pseudo-solutions sont les $X_0 + k$, avec $k \in K$. On pose $S = X_0 - p_K(X_0)$, où p_K est le projecteur orthogonal sur K .

Alors S est une pseudo-solution, et $S \perp K$. Pour toute pseudo-solution $X = S + k$ ($k \in K$), le théorème de Pythagore donne $\|X\|^2 = \|S\|^2 + \|k\|^2 \geq \|S\|^2$, avec égalité si et seulement si $k = 0$. Enfin, si S' vérifie les deux conditions, alors $S' - S \in K$ et $S' - S \perp K$, donc $S' = S$.

$\exists! S$ de norme minimale, caractérisée par ${}^tAAS = {}^tAB$ et $S \perp \ker({}^tAA)$.

11. Cas particuliers.

a) $\ker({}^tAA) = \ker A = \{0\}$, donc ${}^tAA$ est inversible.

$$S = ({}^tAA)^{-1}{}^tAB.$$

b) $\ker({}^tAA) = M_{n,1}(\mathbb{R})$, et S lui est orthogonal.

$$S = 0.$$

12. Linéarité.

Soient S_1 et S_2 associés à B_1 et B_2 , et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha S_1 + S_2$ vérifie ${}^tAA(\alpha S_1 + S_2) = {}^tA(\alpha B_1 + B_2)$, et il est orthogonal à K . Par la caractérisation de 10, c'est la pseudo-solution de norme minimale associée à $\alpha B_1 + B_2$.

$$B \mapsto S \text{ est linéaire de } M_{m,1}(\mathbb{R}) \text{ dans } M_{n,1}(\mathbb{R}).$$

13. Expression spectrale de A^+ .

a) $A \neq 0$, donc ${}^tAA \neq 0$ (2b). Une matrice diagonalisable dont toutes les valeurs propres sont nulles est nulle.

$$\Gamma(A) \neq \emptyset.$$

b) On pose $S = \sum_{i \in \Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i {}^tAB$. Ce vecteur appartient à $\bigoplus_{i \in \Gamma} E_{\lambda_i}$, orthogonal à $E_0 = \ker({}^tAA)$ (si 0 est valeur propre). De plus, ${}^tAAS = \sum_j \lambda_j P_j \sum_{i \in \Gamma} \frac{1}{\lambda_i} P_i {}^tAB = \sum_{i \in \Gamma} P_i {}^tAB$. Or ${}^tAB \in \text{Im}({}^tAA)$, qui est orthogonal à $\ker({}^tAA)$ (${}^tAA$ symétrique), donc ${}^tAB = \sum_{i \in \Gamma} P_i {}^tAB$. Par 10, ce S est la pseudo-solution de norme minimale, pour tout B .

$$A^+ = \sum_{i \in \Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i {}^tA.$$

14. Retour à l'exemple.

On a $\Gamma(A) = \{2\}$ et $\lambda_2 = 6$. De plus, $P_2 {}^tA = {}^tA$, car $\text{Im } {}^tA \perp \ker A = E_0$.

$$A^+ = \frac{1}{6} {}^tA = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^+ B = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right).$$

15. Cas d'une matrice ligne.

Si $A \neq 0$, par 4b, $\Gamma(A)$ correspond à la seule valeur propre $a = A {}^tA$, de projecteur $\frac{1}{a} {}^tAA$. Donc $A^+ = \frac{1}{a^2} {}^tAA {}^tA = \frac{{}^tA}{a}$. Si $A = 0$, $A^+ = 0$ par 11b.

$$A^+ = \frac{{}^tA}{A {}^tA} \quad (A \neq 0), \quad A^+ = 0 \quad (A = 0).$$

Partie IV – Étude de l'opérateur $A \mapsto A^+$

Partie IV – Propriétés de Penrose

$$A^+ = \sum_{\Gamma} \frac{1}{\lambda_i} P_i {}^t A.$$

Corrigé – Partie IV.

16. Les quatre relations.

Si $A = 0$, tout est clair ($A^+ = 0$). Sinon, on note $\Pi = \sum_{i \in \Gamma} P_i = I_n - P_0$, où P_0 est le projecteur orthogonal sur $\ker A$ ($P_0 = 0$ si 0 n'est pas valeur propre). On calcule $A^+ A = \sum_{i \in \Gamma} \frac{1}{\lambda_i} P_i \sum_j \lambda_j P_j = \Pi$, symétrique par 1. Alors $AA^+ A = A\Pi = A - AP_0 = A$, et $A^+ AA^+ = \Pi A^+ = A^+$, car $\Pi P_i = P_i$ pour $i \in \Gamma$. Enfin, $AA^+ = \sum_{\Gamma} \frac{1}{\lambda_i} A P_i {}^t A$ est une somme de matrices symétriques.

$$A = AA^+ A, \quad A^+ = A^+ AA^+, \quad {}^t(A^+ A) = A^+ A, \quad {}^t(AA^+) = AA^+.$$

17. Caractérisation de A^+ .

a) Des relations (*), on tire :

- $M = M(AM) = M {}^t(AM) = M {}^t M {}^t A$ et $M = (MA)M = {}^t(MA)M = {}^t A {}^t M M$;
- $A = A(MA) = A {}^t A {}^t M$ et $A = (AM)A = {}^t M {}^t A A$;
- ${}^t A = {}^t(AM)A = {}^t A {}^t M {}^t A = {}^t A {}^t(AM) = {}^t A {}^t A M$, et de même ${}^t A = {}^t(MA) {}^t A = M {}^t A {}^t A$.

$$M = M {}^t M {}^t A = {}^t A {}^t M M, \quad A = A {}^t A {}^t M = {}^t M {}^t A A, \quad {}^t A = {}^t A A M = M {}^t A {}^t A.$$

b) Soient M et N vérifiant (*). Par a), $M = M {}^t M {}^t A = M {}^t M ({}^t A A N) = (M {}^t M {}^t A) A N = M A N$, et $N = {}^t A {}^t N N = (M {}^t A) {}^t N N = M A ({}^t A {}^t N N) = M A N$. Donc $M = N$. Comme A^+ vérifie (*) par 16 :

$$M = A^+ ; \quad A^+ \text{ est l'unique matrice vérifiant (*)}.$$

18. Formules.

a) Les relations de 16, lues pour le couple (A^+, A) , sont exactement les relations (*) pour la matrice A^+ avec $M = A$. Par unicité :

$$(A^+)^+ = A.$$

b) On transpose les relations de 16 : ${}^t A = {}^t A {}^t(A^+) {}^t A$, ${}^t(A^+) = {}^t(A^+) {}^t A {}^t(A^+)$, et les produits ${}^t(A^+) {}^t A = {}^t(AA^+) = AA^+$ et ${}^t A {}^t(A^+) = {}^t(A^+ A) = A^+ A$ sont symétriques. Ce sont les relations (*) pour ${}^t A$ et $M = {}^t(A^+)$.

$$({}^t A)^+ = {}^t(A^+).$$

19. Limite de Tikhonov.

${}^t A A + x I_n = \sum_i (\lambda_i + x) P_i$, avec $\lambda_i + x > 0$: cette matrice est inversible, d'inverse $\sum_i \frac{1}{\lambda_i + x} P_i$ (par $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$). Si 0 est valeur propre, $P_0 {}^t A = 0$, car $\text{Im } {}^t A = \text{Im } ({}^t A A) \perp$

$\ker({}^tAA)$. Donc

$$({}^tAA + xI_n)^{-1}{}^tA = \sum_{i \in \Gamma} \frac{1}{\lambda_i + x} P_i {}^tA \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \sum_{i \in \Gamma} \frac{1}{\lambda_i} P_i {}^tA = A^+$$

(coefficient par coefficient ; si $A = 0$, tout est nul).

$$A^+ = \lim_{x \rightarrow 0^+} ({}^tAA + xI_n)^{-1}{}^tA.$$

Pour l'exemple, $({}^tAA + xI_3)^{-1}{}^tA = \frac{1}{6+x} {}^tA$ (car ${}^tAA {}^tA = 6 {}^tA$: les colonnes de ${}^tA$ sont dans E_6).

$$A^+ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{{}^tA}{6+x} = \frac{1}{6} {}^tA.$$

20. Homogénéité.

$M = \frac{1}{\alpha} A^+$ vérifie les relations (*) pour la matrice αA : $(\alpha A)M(\alpha A) = \alpha A A^+ A = \alpha A$, $M(\alpha A)M = \frac{1}{\alpha} A^+ A A^+ = M$, et $M(\alpha A) = A^+ A$, $(\alpha A)M = A A^+$ sont symétriques. Si $A \neq 0$, alors $A^+ \neq 0$ (car $A = A A^+ A$), et un coefficient non nul de $\frac{1}{\alpha} A^+$ tend vers $\pm\infty$: pas de limite. Si $A = 0$, $(\alpha A)^+ = 0$.

$$(\alpha A)^+ = \frac{1}{\alpha} A^+ ; \text{ limite en 0 si et seulement si } A = 0.$$