

ESSEC

Mathématiques I

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2012

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1	Question préliminaire	2
	<i>Thèmes abordés : espaces vectoriels ; algèbre bilinéaire.</i>	2
2	Décomposition spectrale de la matrice tAA associée à une matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$	2
	<i>Thèmes abordés : réduction ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire.</i>	2
3	Pseudo-solution d'une équation linéaire	3
	<i>Thèmes abordés : applications linéaires ; algèbre bilinéaire.</i>	3
4	Pseudo-inverse d'une matrice	3
	<i>Thèmes abordés : applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; réduction.</i>	3
5	Étude de l'opérateur $A \mapsto A^+$	4
	<i>Thèmes abordés : applications linéaires ; algèbre bilinéaire.</i>	4

Dans tout le problème, les lettres m et n désignent des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1. On note $M_{m,n}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients réels ; tout élément de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ est ainsi une matrice colonne à n lignes. Pour toute matrice M , tM désigne sa transposée et I_n la matrice identité de $M_{n,n}(\mathbb{R})$.

Pour $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, on pose

$$\ker M = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 0\}, \quad \text{Im } M = \{MX \mid X \in M_{n,1}(\mathbb{R})\}.$$

Pour tout entier $m \geq 1$, $M_{m,1}(\mathbb{R})$ est muni de sa structure euclidienne canonique : si $X = (x_i)_{1 \leq i \leq m}$ et $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq m}$, alors

$${}^tXY = \sum_{i=1}^m x_i y_i, \quad \|Y\|_m^2 = {}^tYY = \sum_{i=1}^m y_i^2.$$

On admet que toute matrice et sa transposée ont même rang. Lorsque le produit de deux matrices M et N est défini, on a ${}^t(MN) = {}^tN {}^tM$.

1 Question préliminaire

Thèmes abordés : espaces vectoriels ; algèbre bilinéaire.

Soit F un sous-espace vectoriel non nul de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, de dimension k , et $(U_1, U_2, \dots, U_k)$ une base orthonormée de vecteurs colonnes de F . On considère la projection orthogonale sur F , représentée dans la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ par la matrice P .

1. Montrer que $P = \sum_{i=1}^k U_i {}^tU_i$ et vérifier que P est une matrice symétrique.

2 Décomposition spectrale de la matrice tAA associée à une matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

Thèmes abordés : réduction ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire.

Dans toute cette partie, A désigne une matrice de $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

2. a) Préciser la taille de la matrice tAA et vérifier que $\ker A \subset \ker({}^tAA)$.
 b) Montrer que si $X \in \ker({}^tAA)$, alors $\|AX\|_m = 0$, puis établir $\ker A = \ker({}^tAA)$. Montrer que A et tAA sont nulles simultanément.
 c) Justifier l'égalité $\text{Im } {}^tA = \text{Im } ({}^tAA)$.
3. a) Établir que la matrice tAA est diagonalisable et, en calculant $\|AX\|_m^2$ pour X vecteur propre de tAA , montrer que ses valeurs propres sont des réels positifs.
 b) On désigne par $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ la liste, dans l'ordre croissant, des valeurs propres distinctes de tAA . On rappelle que

$$M_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}({}^tAA), \quad E_{\lambda_i}({}^tAA) = \ker({}^tAA - \lambda_i I_n).$$

Pour $i \in \{1, \dots, p\}$, on note P_i la matrice, dans la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, de la projection orthogonale sur $E_{\lambda_i}({}^tAA)$. Vérifier que $P_i P_j = 0$ lorsque $i \neq j$. Justifier les

relations

$$I_n = \sum_{i=1}^p P_i, \quad {}^tAA = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i.$$

Cette dernière écriture s'appelle la décomposition spectrale de tAA .

4. Exemples.

a) Déterminer la décomposition spectrale de tAA lorsque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) On considère la matrice ligne $A = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$, où les réels $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont fixés et non tous nuls. Ainsi, A^tA est un réel. Montrer que le polynôme $X^2 - (A^tA)X$ est annulateur de tAA . Préciser la liste des valeurs propres et la décomposition spectrale de tAA .

3 Pseudo-solution d'une équation linéaire

Thèmes abordés : applications linéaires ; algèbre bilinéaire.

On s'intéresse à l'équation $AX = B$, où $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{m,1}(\mathbb{R})$. Une matrice $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ est une solution si $AX = B$. Elle est une *pseudo-solution* si

$$\forall Z \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \|AX - B\|_m \leq \|AZ - B\|_m.$$

5. On suppose que l'équation $AX = B$ admet au moins une solution. Montrer que X est une pseudo-solution si et seulement si X est une solution de l'équation.
6. On suppose que X est une pseudo-solution de l'équation. Montrer que, pour tout réel λ et toute matrice $Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\lambda^2 \|AY\|_m^2 + 2\lambda {}^tY^t A (AX - B) \geq 0.$$

En déduire que ${}^tAAX = {}^tAB$.

7. Montrer que tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tAAX = {}^tAB$ est une pseudo-solution et en déduire qu'il existe toujours au moins une pseudo-solution de l'équation.
8. Déterminer toutes les pseudo-solutions de l'équation $AX = B$ lorsque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Parmi celles-ci, préciser celle dont la norme euclidienne est minimale.

9. Donner une condition sur le rang de A pour que l'équation admette une unique pseudo-solution.

4 Pseudo-inverse d'une matrice

Thèmes abordés : applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; réduction.

On reprend les notations de la partie précédente. Parmi les pseudo-solutions de l'équation $AX = B$, on cherche celle dont la norme euclidienne est minimale.

10. Montrer que l'équation possède une unique pseudo-solution de norme minimale, notée S , caractérisée par les deux conditions

$${}^tAAS = {}^tAB \quad \text{et} \quad S \perp \ker({}^tAA).$$

11. Pour B fixé dans $M_{m,1}(\mathbb{R})$, préciser S dans les cas suivants.
- A est de rang n .
 - A est la matrice nulle.
12. Lorsque B varie dans $M_{m,1}(\mathbb{R})$, montrer que l'application qui à B associe son unique pseudo-solution de norme minimale S est une application linéaire de $M_{m,1}(\mathbb{R})$ dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Dans les bases canoniques respectives, elle est représentée par une matrice de $M_{n,m}(\mathbb{R})$, appelée jusqu'à la fin du problème *pseudo-inverse* de A et notée A^+ .
13. On suppose A non nulle et on reprend la décomposition spectrale introduite à la question 3.b) : ${}^tAA = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i$. On désigne par $\Gamma(A)$ l'ensemble des indices $i \in \{1, \dots, p\}$ tels que $\lambda_i \neq 0$.
- Pourquoi $\Gamma(A) \neq \emptyset$?
 - Vérifier que $A^+ = \sum_{i \in \Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i {}^tA$.
14. Reprendre l'exemple de la question 8 en calculant explicitement A^+ ; retrouver ainsi l'unique pseudo-solution de norme minimale.
15. Lorsque $A \in M_{1,n}(\mathbb{R})$, montrer que

$$A^+ = \begin{cases} \frac{{}^tA}{A {}^tA} & \text{si } A \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5 Étude de l'opérateur $A \mapsto A^+$

Thèmes abordés : applications linéaires ; algèbre bilinéaire.

16. Démontrer les relations suivantes :

$$A = AA^+A, \quad A^+ = A^+AA^+, \quad {}^t(A^+A) = A^+A, \quad {}^t(AA^+) = AA^+.$$

17. Soit $M \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ vérifiant

$$(*) \quad A = AMA, \quad M = MAM, \quad {}^t(MA) = MA, \quad {}^t(AM) = AM.$$

- Montrer que M vérifie les relations

$$M = M {}^tM {}^tA = {}^tA {}^tMM, \quad A = A {}^tA {}^tM = {}^tM {}^tAA, \quad {}^tA = {}^tAAM = MA {}^tA.$$

- En déduire que $M = A^+$ et qu'ainsi A^+ est l'unique matrice vérifiant les relations (*).
18. Établir les formules suivantes.
- $(A^+)^+ = A$.
 - $({}^tA)^+ = {}^t(A^+)$.

19. Soit $x > 0$ et $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$A^+ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[({}^tAA + xI_n)^{-1} {}^tA \right].$$

Sous réserve d'existence, la limite en un point d'une matrice est la matrice formée des limites, en ce même point, de ses coefficients. Utiliser ce procédé pour trouver la pseudo-inverse de la matrice A de la question 8.

20. Pour tout réel $\alpha \neq 0$ et toute matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, exprimer $(\alpha A)^+$ en fonction de α et A^+ . La matrice $(\alpha A)^+$ admet-elle une limite lorsque α tend vers 0 ?