

HEC Paris

Mathématiques approfondies – Mathématiques I

Corrigé du sujet adapté – 2012

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Partie I – Quelques inégalités de concavité

Partie I – Inégalités de concavité

$$h(x) = -x \ln x - (1-x) \ln(1-x) \text{ sur }]0, 1[.$$

Corrigé – Partie I.

1. Étude de h .

- a) Pour $x \in]0, 1[$, $\ln x < 0$ et $\ln(1-x) < 0$, donc $h(x) > 0$. h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, 1[$ avec

$$h'(x) = -\ln x - 1 + \ln(1-x) + 1 = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right), \quad h''(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} < 0.$$

h est positive et concave sur $]0, 1[$.

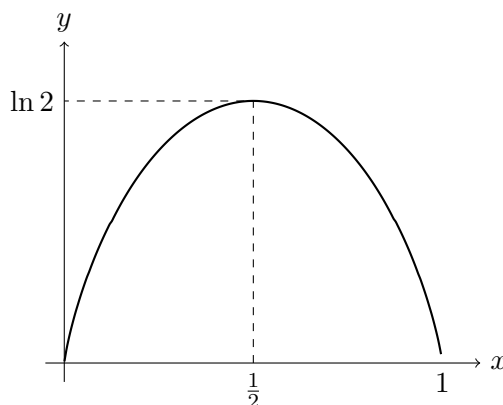
- b) Par croissances comparées, $x \ln x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$, et $(1-x) \ln(1-x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 1^-$ (on pose $u = 1-x$). On en déduit $h(x) \rightarrow 0$ en 0^+ et en 1^- . On prolonge h par $h(0) = h(1) = 0$.

En 0, le taux d'accroissement vaut $\frac{h(x)-h(0)}{x} = -\ln x - \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x}$. Le second terme tend vers 1, car $\ln(1-x) \sim -x$. Le taux tend donc vers $+\infty$, et le prolongement n'est pas dérivable en 0 (de même en 1, par symétrie $h(1-x) = h(x)$).

h se prolonge par continuité avec $h(0) = h(1) = 0$, mais le prolongement n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

- c) h' est positive sur $]0, \frac{1}{2}]$ et négative sur $[\frac{1}{2}, 1[$. h admet donc son maximum en $\frac{1}{2}$, avec $h(\frac{1}{2}) = \ln 2$. La courbe est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$ et admet

des demi-tangentes verticales en 0 et en 1.



2. Inégalité $\ln u \leq u - 1$.

On pose $\psi(u) = u - 1 - \ln u$ sur $]0, +\infty[$. On a $\psi'(u) = 1 - \frac{1}{u}$, qui est négatif sur $]0, 1]$ et positif sur $[1, +\infty[$, avec $\psi(1) = 0$. Ainsi ψ atteint son minimum en 1, et $\psi(u) > 0$ pour $u \neq 1$ (stricte monotonie de part et d'autre de 1).

$$\boxed{\forall u > 0, \ln u \leq u - 1, \text{ avec égalité si et seulement si } u = 1.}$$

3. Signe de d .

On applique la question 2 à $u = \frac{y}{x}$ et à $u = \frac{1-y}{1-x}$:

$$d(x, y) \leq x \left(\frac{y}{x} - 1 \right) + (1-x) \left(\frac{1-y}{1-x} - 1 \right) = (y-x) + (x-y) = 0.$$

Comme $x > 0$ et $1-x > 0$, l'égalité impose l'égalité dans chacune des deux inégalités, soit $\frac{y}{x} = 1$.

$$\boxed{d(x, y) \leq 0, \text{ avec égalité si et seulement si } x = y.}$$

4. Inégalité de Jensen (cas à densité).

- a) ℓ est concave et dérivable sur $\mathbb{R}$: sa courbe est en dessous de chacune de ses tangentes (caractérisation des fonctions concaves dérivables). Pour tout y , on a donc $\ell(x) \leq \ell(y) + \ell'(y)(x - y)$.

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ell(x) - \ell(y) \leq \ell'(y)(x - y).}$$

- b) Pour tout x , a) donne $\ell(r(x)) \leq \ell(y) + \ell'(y)(r(x) - y)$. On multiplie par $f(x) \geq 0$ et on intègre ; toutes les intégrales convergent par hypothèse, et $\int f = 1$. Par croissance de l'intégrale :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \ell(r(x))f(x) dx \leq \ell(y) + \ell'(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)f(x) dx - y \right).}$$

- c) On choisit $y = \int_{-\infty}^{+\infty} r(x)f(x) dx$.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \ell(r(x))f(x) dx \leq \ell \left(\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)f(x) dx \right).}$$

5. Inégalité de Jensen (cas discret).

Pour tout y et tout n , on a $\ell(r(x_n))p_n \leq \ell(y)p_n + \ell'(y)(r(x_n) - y)p_n$. On somme ces inégalités ; toutes les séries convergent et $\sum p_n = 1$, d'où $\sum \ell(r(x_n))p_n \leq \ell(y) + \ell'(y)(\sum r(x_n)p_n - y)$. On choisit $y = \sum_{n=1}^{+\infty} r(x_n)p_n$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ell(r(x_n))p_n \leq \ell\left(\sum_{n=1}^{+\infty} r(x_n)p_n\right).$$

Partie II – Entropie dans le cas continu**Partie II – Entropie d'une densité**

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f \ln f \text{ pour } f \in \mathcal{F}.$$

Corrigé – Partie II.**6. Loi normale.**

a) $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ est continue, strictement positive et d'intégrale 1. On a

$$\varphi(x) \ln \varphi(x) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi) \varphi(x) - \frac{x^2}{2} \varphi(x).$$

Les intégrales $\int \varphi$ et $\int x^2 \varphi(x) dx = \mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{V}(Z) = 1$ convergent. Par linéarité, $\varphi \in \mathcal{F}$, et $\int \varphi \ln \varphi = -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2}$.

$$H(Z) = \frac{1}{2}(1 + \ln(2\pi)) = \frac{1}{2} \ln(2\pi e).$$

b) On a $F_Y(y) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$ (car $a > 0$). Comme f est continue, F_X est de classe $\mathcal{C}^1$, donc F_Y aussi, et Y admet la densité $g(y) = \frac{1}{a}f\left(\frac{y-b}{a}\right)$. Cette densité est continue, strictement positive et d'intégrale 1. Pour l'entropie, on a

$$g(y) \ln g(y) = \frac{1}{a}f\left(\frac{y-b}{a}\right) \left[\ln f\left(\frac{y-b}{a}\right) - \ln a \right].$$

Le changement de variable affine $x = \frac{y-b}{a}$ (bijection $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, qui conserve la nature des intégrales) donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g \ln g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln f(x) dx - \ln a \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx,$$

intégrale convergente.

$$g \in \mathcal{F} \quad \text{et} \quad H(Y) = H(X) + \ln a.$$

c) Une variable $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ a même loi que $\sigma Z + \mu$, donc, par b) :

$$H(Y) = \frac{1}{2} \ln(2\pi e) + \ln \sigma = \frac{1}{2} \ln(2\pi e \sigma^2).$$

7. La quantité $D(f, g)$.

- a) Par la question 2 avec $u = \frac{g(x)}{f(x)} > 0$, et comme $f(x) > 0$:

$$f(x) \ln \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right) \leq g(x) - f(x).$$

On intègre (intégrales convergentes) : $\int f \ln \frac{g}{f} \leq 1 - 1 = 0$.

$$\boxed{D(f, g) \geq 0.}$$

- b) Par linéarité,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\ln \frac{g}{f} + 1 - \frac{g}{f} \right) f = -D(f, g) + \int f - \int g = 0 - 0 = 0.$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\ln \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right) + 1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right) f(x) dx = 0.}$$

L'intégrande est continu et négatif (question 2), et son intégrale est nulle : il est donc identiquement nul. Comme $f > 0$, on obtient $\ln \frac{g}{f} = \frac{g}{f} - 1$ en tout point, donc $\frac{g}{f} = 1$ (cas d'égalité de la question 2).

$$\boxed{f = g.}$$

Partie III – Entropie dans le cas discret**Partie III – Entropie d'une loi discrète**

$$h_N(x) = -\sum_{k=1}^N x_k \ln x_k ; \text{ pour } (p_n) \in \mathcal{S}, H(X) = \sum p_n |\ln p_n|.$$

Corrigé – Partie III.**8. Cas d'un nombre fini de valeurs.**

- a) h_N est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]0, 1[^N$, et $\partial_k h_N(x) = -\ln x_k - 1$. Chaque dérivée partielle ne dépend que de x_k .

$$\boxed{\nabla h_N(x) = \begin{pmatrix} -1 - \ln x_1 \\ \vdots \\ -1 - \ln x_N \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 h_N(x) = \text{diag} \left(-\frac{1}{x_1}, \dots, -\frac{1}{x_N} \right).}$$

- b) La contrainte est linéaire, de la forme $\langle u, x \rangle = 1$ avec $u = (1, \dots, 1)$. Un point x de $]0, 1[^N$ est critique sous la contrainte si et seulement si $\sum x_k = 1$ et $\nabla h_N(x) \in \text{Vect}(u)$. Cela revient à dire que tous les $-1 - \ln x_k$ sont égaux, donc que les x_k sont égaux ($\ln$ est injective). La contrainte impose alors $x_k = \frac{1}{N}$, qui appartient bien à $]0, 1[$ car $N \geq 2$.

$$\boxed{x^* = \left(\frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N} \right) \text{ est l'unique point critique sous la contrainte.}}$$

c) Soit $x \in]0, 1[^N$ avec $\sum x_k = 1$. Par la question 2 avec $u = \frac{1}{Nx_k}$:

$$\begin{aligned} h_N(x) - h_N(x^*) &= - \sum_{k=1}^N x_k \ln x_k - \ln N = \sum_{k=1}^N x_k \ln \left(\frac{1}{Nx_k} \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^N x_k \left(\frac{1}{Nx_k} - 1 \right) = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

h_N admet en x^* un maximum global sous la contrainte, égal à $\ln N$.

d) On note $I = \{k : p_k > 0\}$, de cardinal $m \leq N$. Si $m \geq 2$, la question c) appliquée à $(p_k)_{k \in I}$ (avec N remplacé par m) donne $H(X) \leq \ln m \leq \ln N$. Si $m = 1$, $H(X) = 0 \leq \ln N$. L'égalité $H(X) = \ln N$ impose $m = N$, puis, par c) et l'unicité du cas d'égalité de la question 2, $p_k = \frac{1}{N}$ pour tout k .

L'entropie est maximale (égale à $\ln N$) pour la loi uniforme sur $\llbracket 1, N \rrbracket$, et pour elle seule.

9. Existence de l'entropie si X a une espérance.

a) La série $\sum p_n$ converge, donc $p_n \rightarrow 0$. Or $\sqrt{t} \ln t \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0^+$ (croissances comparées), donc $\sqrt{p_n} |\ln p_n| \rightarrow 0$.

$$\exists n_0, \forall n \geq n_0, \quad \sqrt{p_n} |\ln p_n| \leq 1.$$

b) Pour $n \geq n_0$, on a $p_n |\ln p_n| = \sqrt{p_n} \cdot \sqrt{p_n} |\ln p_n| \leq \sqrt{p_n}$. Si de plus $p_n \leq \frac{1}{n^3}$, alors $\sqrt{p_n} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$.

$$p_n |\ln p_n| \leq \frac{1}{n^{3/2}}.$$

c) Si $p_n > \frac{1}{n^3}$, on a $0 < -\ln p_n < 3 \ln n$ (car $p_n < 1$), d'où $p_n |\ln p_n| \leq 3p_n \ln n$. Avec b) :

$$\forall n \geq n_0, \quad p_n |\ln p_n| \leq \max \left\{ \frac{1}{n^{3/2}}, 3p_n \ln n \right\} \leq \frac{1}{n^{3/2}} + 3np_n.$$

d) On a utilisé $\ln n \leq n$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, et $\sum np_n$ converge par hypothèse. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum p_n |\ln p_n|$ converge.

$\sum p_n |\ln p_n|$ converge : toute variable à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ (de loi dans $\mathcal{S}$) ayant une espérance possède une entropie.

10. Loi géométrique et entropie maximale.

a) $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\theta)$ et $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\theta}$. On a $|\ln p_n| = -\ln \theta - (n-1) \ln(1-\theta)$ (car $p_n < 1$). Par linéarité (séries convergentes, car X a une espérance) :

$$H(X) = -\ln \theta - \ln(1-\theta)(\mathbb{E}(X) - 1) = -\ln \theta - \frac{1-\theta}{\theta} \ln(1-\theta).$$

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(\theta), \quad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\theta}, \quad H(X) = \frac{h(\theta)}{\theta}.$$

- b) On compte le nombre d'épreuves de Bernoulli de paramètre θ nécessaires pour obtenir le premier succès ; un succès correspond à `rd.random() < theta`.

```
def X(theta):
    n = 1
    while rd.random() >= theta:
        n = n + 1
    return n
```

- c) Y a une espérance, donc, par 9d), $H(Y) = -\sum q_n \ln q_n$ existe. La série $\sum q_n \ln p_n = \sum q_n (\ln \theta + (n-1) \ln(1-\theta))$ converge, et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q_n \ln p_n = \ln \theta + (\mathbb{E}(Y) - 1) \ln(1 - \theta) = \ln \theta + (\mathbb{E}(X) - 1) \ln(1 - \theta) = -H(X).$$

Par linéarité, $\sum q_n \ln \frac{p_n}{q_n} = \sum q_n \ln p_n - \sum q_n \ln q_n = -H(X) + H(Y)$.

$$H(Y) - H(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} q_n \ln \left(\frac{p_n}{q_n} \right).$$

- d) Par la question 2, $q_n \ln \frac{p_n}{q_n} \leq p_n - q_n$, d'où, en sommant, $H(Y) - H(X) \leq 1 - 1 = 0$. L'égalité impose $p_n = q_n$ pour tout n (somme nulle de termes négatifs).

$H(Y) \leq H(X)$: parmi les lois de $\mathcal{S}$ d'espérance $\frac{1}{\theta}$, la loi $\mathcal{G}(\theta)$ maximise l'entropie (et elle seule).

Partie IV – Entropie et taux de rendement asymptotique

Partie IV – Paris hippiques

$$R_n = r_0 \prod_{i=1}^n M_i, T_n = \left(\frac{R_n}{r_0} \right)^{1/n} - 1.$$

Corrigé – Partie IV.

11. Convergence en probabilité et exponentielle.

- a) Pour $z \leq 0$, $[Z_n \leq z] = \emptyset$. Pour $z > 0$, $[Z_n \leq z] = [X_n \leq \ln z]$, qui appartient à $\mathcal{A}$ car X_n est une variable aléatoire.

$Z_n = \exp(X_n)$ est une variable aléatoire (de même pour Z).

- b) La suite d'événements $([|X| \geq m])_{m \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, d'intersection vide (car X est à valeurs réelles). Par le théorème de la limite monotone, $\mathbb{P}(|X| \geq m) \rightarrow 0$.

$$\exists s > 0, \quad \mathbb{P}(|X| \geq s) < \alpha.$$

- c) On a $\mathbb{P}(K_1 \cup K_2) = \mathbb{P}(K_1) + \mathbb{P}(K_2) - \mathbb{P}(K_1 \cap K_2) \leq \mathbb{P}(K_1) + \mathbb{P}(K_2)$. On applique ceci deux fois :

$$\mathbb{P}(K_1 \cup K_2 \cup K_3) \leq \mathbb{P}(K_1) + \mathbb{P}(K_2) + \mathbb{P}(K_3).$$

On se place sur l'événement $[|X| < s] \cap [|X_n - X| < 1] \cap [|X_n - X| < \varepsilon e^{-1-s}]$, et on note $u = X_n - X$. L'inégalité des accroissements finis appliquée à $\exp$ sur le segment d'extrémités 0 et u donne $|e^u - 1| \leq |u|e^{|u|} \leq e|u|$. Par conséquent,

$$|Z_n - Z| = e^X |e^u - 1| \leq e^s \cdot e \cdot |u| < e^{s+1} \varepsilon e^{-1-s} = \varepsilon.$$

Ainsi, $[|Z_n - Z| \geq \varepsilon]$ est inclus dans la réunion des trois événements complémentaires. Par croissance de $\mathbb{P}$ et l'inégalité précédente :

$$\mathbb{P}(|Z_n - Z| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X| \geq s) + \mathbb{P}(|X_n - X| \geq 1) + \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon e^{-1-s}).$$

- d) Comme $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, les deux derniers termes tendent vers 0. Il existe donc n_1 tel que, pour $n \geq n_1$, $\mathbb{P}(|Z_n - Z| \geq \varepsilon) \leq 2\alpha$. Comme α est arbitraire :

$$\exp(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} \exp(X).$$

12. Taux de rendement asymptotique.

- a) Si le cheval k gagne la course i , le parieur perd toutes ses mises et reçoit $f_k c_k R_{i-1}$. Donc $M_i = f_{G_i} c_{G_i} = \psi(G_i)$, avec $\psi(k) = f_k c_k > 0$. Les G_i sont mutuellement indépendantes et de même loi. Par le lemme des coalitions (fonctions de variables indépendantes), on obtient :

$$(M_n) \text{ est une suite de variables indépendantes, de même loi, à valeurs dans } \{f_1 c_1, \dots, f_N c_N\} \subset]0, +\infty[.$$

- b) On a $\ln(1 + T_n) = \frac{1}{n} \ln \frac{R_n}{r_0} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln M_i$. Les variables $\ln M_i$ sont indépendantes, de même loi, et admettent une espérance et une variance. Par la loi faible des grands nombres, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln M_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(\ln M_1)$. Par la question 11, $1 + T_n \xrightarrow{\mathbb{P}} e^{\mathbb{E}(\ln M_1)}$, et donc T_n converge en probabilité vers $e^{\mathbb{E}(\ln M_1)} - 1$, puisque $|T_n - \tau| = |(1 + T_n) - (1 + \tau)|$.

$$T_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \tau = \exp(\mathbb{E}(\ln M_1)) - 1.$$

13. Stratégie optimale.

- a) Par le théorème de transfert, $\mathbb{E}(\ln M_1) = \sum_{k=1}^N \mathbb{P}(G_1 = k) \ln(f_k c_k)$.

$$\tau = \exp\left(\sum_{k=1}^N p_k \ln(f_k c_k)\right) - 1.$$

- b) τ est une fonction croissante de $\sum p_k \ln(f_k c_k) = \sum p_k \ln c_k + \sum p_k \ln f_k$. Il s'agit donc de maximiser $\sum p_k \ln f_k$ sous la contrainte $\sum f_k = 1$. Par la question 2 avec $u = \frac{f_k}{p_k}$:

$$\sum_{k=1}^N p_k \ln f_k - \sum_{k=1}^N p_k \ln p_k = \sum_{k=1}^N p_k \ln \frac{f_k}{p_k} \leq \sum_{k=1}^N (f_k - p_k) = 0,$$

avec égalité si et seulement si $f_k = p_k$ pour tout k (et $p_k \in]0, 1[$ est admissible).

$$\text{Stratégie optimale : } f_k = p_k \quad (1 \leq k \leq N), \quad \tau^* = \exp\left(\sum_{k=1}^N p_k \ln(p_k c_k)\right) - 1.$$

c) Par la question 2 avec $u = \frac{1}{p_k c_k}$:

$$-\sum_{k=1}^N p_k \ln(p_k c_k) = \sum_{k=1}^N p_k \ln \frac{1}{p_k c_k} \leq \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{c_k} - p_k \right) = 1 - 1 = 0.$$

$$\sum_{k=1}^N p_k \ln(p_k c_k) \geq 0, \quad \text{donc } \tau^* \geq 0.$$

L'égalité a lieu si et seulement si $p_k c_k = 1$ pour tout k . Dans ce cas, $\tau^* = 0$, et aucune stratégie ne donne un taux strictement positif.

Le parieur n'a aucune stratégie de taux asymptotique strictement positif si et seulement si $c_k = \frac{1}{p_k}$ pour tout k .