

ECRICOME

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2013

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Exercice 1

Exercice 1 – Matrices vérifiant $A^k = {}^tA$

$k \geq 2$ et $B = {}^tAA$.

Corrigé – Exercice 1.

1. Symétrie de B .

$${}^tB = {}^tA {}^t({}^tA) = {}^tAA = B, \text{ et } \langle BX, X \rangle = {}^tX {}^tAAX = {}^t(AX)(AX).$$

$${}^tB = B, \quad \langle BX, X \rangle = \|AX\|^2.$$

2. Valeurs propres.

B est symétrique réelle : d'après le théorème spectral, ses valeurs propres sont réelles. Si $BX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, alors $\lambda \|X\|^2 = \langle BX, X \rangle = \|AX\|^2 \geq 0$.

$$\text{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+.$$

3. $B^k = B$.

${}^tA = A^k$ commute avec A , et $B = A^k A = A^{k+1}$. En transposant $A^k = {}^tA$, on obtient $A = ({}^tA)^k = A^{k^2}$. Donc $B^k = A^{k^2+k} = A^{k^2} A^k = A^{k+1} = B$. Si λ est valeur propre de B , alors $\lambda^k = \lambda$ avec $\lambda \geq 0$ et $k \geq 2$, donc $\lambda \in \{0, 1\}$.

$$B^k = B, \quad \text{Sp}(B) \subset \{0, 1\}.$$

4. B est un projecteur.

$B = PDP^{-1}$ avec D diagonale à coefficients dans $\{0, 1\}$ (théorème spectral et question 3). Alors $D^2 = D$.

$$B^2 = PD^2P^{-1} = B.$$

5. Noyaux et images.

$\ker A \subset \ker B$ est clair. Si $BX = 0$, alors $\|AX\|^2 = \langle BX, X \rangle = 0$, donc $AX = 0$. Ainsi $\ker B = \ker A$. Ensuite $B = A \cdot A^k$, donc $\text{Im } B \subset \text{Im } A$, et par le théorème du rang, $\text{rg } B = n - \dim \ker B = n - \dim \ker A = \text{rg } A$.

$$\ker B = \ker A, \quad \text{Im } B = \text{Im } A.$$

6. Isométrie sur $\text{Im } A$.

Si $X \in \text{Im } A = \text{Im } B$, il s'écrit $X = BY$, et $BX = B^2Y = BY = X$. Alors $\|AX\|^2 = \langle BX, X \rangle = \|X\|^2$.

$$\boxed{\forall X \in \text{Im } A, \quad \|AX\| = \|X\|.$$

Exercice 2**Exercice 2 – Extrémums et suite récurrente**

$$f(x, y) = \frac{1}{5} [x^2(1 - x^2) + y^2(1 - y^2) + 2xy] \text{ et } u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}).$$

Corrigé – Exercice 2.**1. Étude de f .**

- a) f est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^1$, avec $\partial_1 f = \frac{2}{5}(x - 2x^3 + y)$ et $\partial_2 f = \frac{2}{5}(y - 2y^3 + x)$. Si (a, b) est critique, la différence des deux équations donne $2(a^3 - b^3) = 0$, donc $a = b$ (car $t \mapsto t^3$ est injective). Puis $2a - 2a^3 = 0$, d'où $a \in \{-1, 0, 1\}$.

$$\boxed{\text{Points critiques : } (0, 0), (1, 1), (-1, -1),}$$

$$\boxed{f(0, 0) = 0, \quad f(1, 1) = f(-1, -1) = \frac{2}{5}.$$

- b) $g'(t) = \frac{2}{5} - \frac{t}{5} : g$ est croissante sur $[0, 2]$ et décroissante sur $[2, +\infty[$, de limite $-\infty$.

$$\boxed{g \text{ admet un unique extremum : un maximum global } g(2) = \frac{2}{5}.$$

- c) D'après l'inégalité admise et b), $f(x, y) \leq g(x^2 + y^2) \leq \frac{2}{5} = f(1, 1)$. De plus $f(x, 0) = \frac{x^2(1-x^2)}{5} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$.

$$\boxed{\max f = \frac{2}{5}, \text{ atteint en } (1, 1) \text{ et } (-1, -1) ; f \text{ n'est pas minorée.}$$

2. Programmation.

On garde en mémoire deux termes consécutifs. Après N passages dans la boucle, a contient u_N .

```
def terme(N, u0, u1):
    a = u0
    b = u1
    for k in range(N):
        c = (a**2*(1 - a**2) + b**2*(1 - b**2) + 2*a*b) / 5
        a = b
        b = c
    return a
```

3. Étude de la suite.

- a) Récurrence double. Si $x = u_n$ et $y = u_{n+1}$ sont dans $[0, 1]$, alors $x^2(1 - x^2)$ et $y^2(1 - y^2)$ sont dans $[0, \frac{1}{4}]$ et $2xy \in [0, 2]$, donc $0 \leq u_{n+2} \leq \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} + 2 \right) \leq 1$.

$$\boxed{\forall n, \quad 0 \leq u_n \leq 1.}$$

Pour $x, y \in [0, 1]$: $x^2(1 - x^2) \leq x^2 \leq x$, $y^2(1 - y^2) \leq y$ et $2xy = xy + xy \leq x + y$.
En sommant :

$$\boxed{u_{n+2} \leq \frac{2}{5}(u_n + u_{n+1}).}$$

- b) Récurrence double. On a $u_0 = a_0$ et $u_1 = a_1$. Si $u_n \leq a_n$ et $u_{n+1} \leq a_{n+1}$, alors par a) :

$$\boxed{u_{n+2} \leq \frac{2}{5}(u_n + u_{n+1}) \leq \frac{2}{5}(a_n + a_{n+1}) = a_{n+2}.}$$

- c) L'équation caractéristique $5x^2 - 2x - 2 = 0$ a deux racines réelles distinctes $r = \frac{1+\sqrt{11}}{5} \approx 0,86$ et $s = \frac{1-\sqrt{11}}{5} \approx -0,46$. Donc $a_n = \lambda r^n + \mu s^n$, avec λ, μ déterminés par a_0 et a_1 . Comme $|r| < 1$ et $|s| < 1$, $a_n \rightarrow 0$, et $0 \leq u_n \leq a_n$.

$$\boxed{a_n = \lambda r^n + \mu s^n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \text{ (encadrement).}}$$

Problème – Discrétisées**Problème – Partie I – Calculs de discrétisées**

Questions 1 à 5.

Corrigé – Problème.**1. Simulation.**

D'après le rappel, aU suit la loi uniforme sur $[0, a]$ si U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$:

```
def discretisee(a):
    return np.floor(a * rd.random())
```

2. Loi de la discrétisée.

$$[X_d = k] = [k \leq X < k + 1].$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X_d = k) = \int_k^{k+1} f(x) dx.}$$

3. Cas uniforme.

Presque sûrement $X \in [0, N[$, donc $X_d \in \{0, \dots, N - 1\}$, et par 2, $\mathbb{P}(X_d = k) = \int_k^{k+1} \frac{dx}{N} = \frac{1}{N}$.

$$\boxed{X_d \hookrightarrow \mathcal{U}(\{0, \dots, N - 1\}).}$$

4. Une loi logarithmique.

Les probabilités sont positives, et $\sum_{k=1}^9 \ln \frac{k+1}{k} = \ln 10$ (somme télescopique) : Y est bien définie. On pose $f(x) = \frac{1}{x \ln 10}$ sur $[1, 10[$ et $f = 0$ ailleurs. f est positive, continue sauf en 1 et 10, et d'intégrale $\frac{\ln 10}{\ln 10} = 1$. Par 2, $\mathbb{P}(X_d = k) = \frac{1}{\ln 10} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \frac{\ln \frac{k+1}{k}}{\ln 10}$ pour $1 \leq k \leq 9$ (et 0 sinon).

$$f(x) = \frac{1}{x \ln 10} \mathbf{1}_{[1,10[}(x) \text{ convient.}$$

5. Discrétisation fine d'une loi exponentielle.

a) Pour $x \geq 0$, $\mathbb{P}(nX \leq x) = 1 - e^{-\lambda x/n}$, et 0 pour $x < 0$: $nX \hookrightarrow \mathcal{E}(\frac{\lambda}{n})$.

$$f_n(x) = \frac{\lambda}{n} e^{-\lambda x/n} \quad (x \geq 0), \quad 0 \text{ sinon.}$$

b) Par 2, $\mathbb{P}(\lfloor nX \rfloor = k) = e^{-\lambda k/n} - e^{-\lambda(k+1)/n}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{P}(\lfloor nX \rfloor = k) = \left(e^{-\lambda/n}\right)^k \left(1 - e^{-\lambda/n}\right),$$

$$\lfloor nX \rfloor + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - e^{-\lambda/n}\right).$$

c) Pour $x \geq 0$: $Y_n \leq x \iff \lfloor nX \rfloor \leq nx \iff \lfloor nX \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor \iff nX < \lfloor nx \rfloor + 1$.

$$\mathbb{P}(Y_n \leq x) = \mathbb{P}\left(X < \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{\lambda(\lfloor nx \rfloor + 1)}{n}\right).$$

d) $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$, d'où $x < \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} \leq x + \frac{1}{n}$ et $\frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} \rightarrow x$. Par continuité de $\exp$, $F_{Y_n}(x) \rightarrow 1 - e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$; pour $x < 0$, $F_{Y_n}(x) = 0$, car $Y_n \geq 0$.

$$x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x, \quad Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda).$$

Problème – Partie II – Discrétisées et lois « polynomiales »

$$u(Q)(x) = \int_x^{x+1} Q(t) dt.$$

Corrigé – Problème.

1. Images des e_k .

$$u(e_k)(x) = \frac{(x+1)^{k+1} - x^{k+1}}{k+1},$$

$$u(e_k) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{k+1} \binom{k+1}{j} e_j = e_k + \frac{k}{2} e_{k-1} + \cdots + \frac{1}{k+1} e_0.$$

2. Linéarité.

Par linéarité de l'intégrale, u est linéaire. Pour $Q = \sum q_k e_k$, $u(Q) = \sum q_k u(e_k) \in \mathbb{R}_n[X]$ par 1.

$$u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X]).$$

3. Base.

$u(e_k)$ est unitaire de degré k (coefficient de $e_k : \frac{k+1}{k+1} = 1$). La famille est échelonnée en degré : elle est libre, et ses $n+1$ éléments en font une base.

$$(u(e_k))_{0 \leq k \leq n} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].$$

4. Existence et unicité de Q_R .

u envoie une base sur une base : c'est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$\forall R \in \mathbb{R}_n[X], \exists ! Q_R \in \mathbb{R}_n[X], u(Q_R) = R.$$

5. Exemple.

$u(e_0) = 1$ et $u(e_1) = x + \frac{1}{2}$. On cherche $Q_R = \alpha e_1 + \beta e_0$ avec $\alpha \left(x + \frac{1}{2}\right) + \beta = \frac{x}{6}$, d'où $\alpha = \frac{1}{6}$ et $\beta = -\frac{1}{12}$.

$$Q_R(x) = \frac{x}{6} - \frac{1}{12}.$$

6. Lois polynomiales.

- a) $f = 0$ hors de $[0, N+1[$, donc $X_d \in \{0, \dots, N\}$ presque sûrement. Pour $k \in \{0, \dots, N\}$, par 2 (partie I), $\mathbb{P}(X_d = k) = \int_k^{k+1} Q = u(Q)(k)$.

$$R = u(Q) \in \mathbb{R}_n[X] \text{ convient.}$$

- b) Supposons qu'un tel Q existe. Alors $\int_0^1 Q(t) dt = \mathbb{P}(X_d = 0) = 0$. Or $Q = f \geq 0$ sur $[0, 1[$, donc sur $[0, 1]$ par continuité. Q est continue, positive, d'intégrale nulle sur $[0, 1]$: elle y est identiquement nulle. Le polynôme Q a donc une infinité de racines, et $Q = 0$. Mais alors $\mathbb{P}(X_d = 1) = \int_1^2 Q = 0 \neq \frac{1}{6}$: contradiction.

$$\text{Aucun polynôme } Q \text{ ne convient.}$$

Problème – Partie III – Toute loi « régulière » sur $\mathbb{N}$ est une discrétisée

$$f(x) = -\sum_{k \geq 0} g'(x+k) \text{ pour } x \geq 0.$$

Corrigé – Problème.

1. Convergence et signe.

$|g'(x+k)| \leq \frac{C}{(1+x+k)^2} \leq \frac{C}{(k+1)^2}$: la série converge absolument par comparaison avec une série de Riemann. g est décroissante, donc $g' \leq 0$.

$$\sum g'(x+k) \text{ converge et } f \geq 0.$$

2. Caractère lipschitzien.

- a) g' est de classe $\mathcal{C}^1$. Sur le segment d'extrémités $x+k$ et $a+k$, tous les points u vérifient $u \geq k$, donc $|g''(u)| \leq \frac{C}{(1+u)^2} \leq \frac{C}{(k+1)^2}$. Par l'inégalité des accroissements finis :

$$|g'(x+k) - g'(a+k)| \leq \frac{C|x-a|}{(k+1)^2}.$$

- b) En sommant (séries convergentes) :

$$|f(x) - f(a)| \leq D|x-a|, \quad D = C \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Si $x \rightarrow a$ dans $\mathbb{R}_+$, alors $f(x) \rightarrow f(a)$: f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3. Calcul de $\int_0^1 f$.

- a) Pour $k \geq 1$ et $t \geq 0$:

$$\frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1} = \frac{1}{(t+k)(t+k+1)} \geq \frac{1}{(t+k+1)^2}.$$

Donc, par télescopage :

$$|R_N(t)| \leq \sum_{k \geq N+1} \frac{C}{(t+k+1)^2} \leq C \sum_{k \geq N+1} \left(\frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1} \right) = \frac{C}{t+N+1}.$$

$$|R_N(t)| \leq \frac{C}{N+1}.$$

- b) Sur $[0, 1]$, $f = S_N + R_N$ avec S_N et $R_N = f - S_N$ continues. Par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 S_N(t) dt = - \sum_{k=0}^N (g(k+1) - g(k)) = g(0) - g(N+1).$$

$$\int_0^1 f(t) dt = g(0) - g(N+1) + \int_0^1 R_N(t) dt.$$

- c) $g(k)$ est le terme général d'une série convergente, donc $g(k) \rightarrow 0$. De plus $\left| \int_0^1 R_N \right| \leq \frac{C}{N+1} \rightarrow 0$.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} g(k) = 0, \quad \int_0^1 f(t) dt = g(0).$$

4. f est une densité.

- a) Les séries étant convergentes,

$$f(t) - f(t+1) = - \sum_{k \geq 0} g'(t+k) + \sum_{k \geq 1} g'(t+k) = -g'(t).$$

Soit $\phi(x) = \int_x^{x+1} f$: ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ (f continue), avec $\phi'(x) = f(x+1) - f(x) = g'(x)$, et $\phi(0) = g(0)$ par 3.c). Donc $\phi = g$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

$$f(t+1) - f(t) = g'(t), \quad g(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt.$$

- b)** Par la relation de Chasles et a), $S_N = \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} f = \sum_{k=0}^{N-1} g(k)$. Comme $f \geq 0$, $x \mapsto \int_0^x f$ est croissante, ce qui donne l'encadrement. Les deux bornes tendent vers $\sum g(k) = 1$ quand $x \rightarrow +\infty$.

$$S_N = \sum_{k=0}^{N-1} g(k), \quad S_{[x]} \leq \int_0^x f \leq S_{[x]+1},$$

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

- c)** f est positive, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, continue sur $\mathbb{R}_+$ (donc continue sauf peut-être en 0) et d'intégrale 1 : c'est une densité. Si X a pour densité f , alors $X \geq 0$ presque sûrement, donc $X_d(\Omega) \subset \mathbb{N}$ presque sûrement. Par la partie I et a), $\mathbb{P}(X_d = k) = \int_k^{k+1} f = g(k) = \mathbb{P}(Y = k)$.

X_d suit la même loi que Y .