

ECRICOME

Mathématiques

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2013

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1 Exercice 1	2
<i>Thèmes abordés : algèbre bilinéaire ; réduction ; applications linéaires.</i>	<i>2</i>
2 Exercice 2	2
<i>Thèmes abordés : fonctions de plusieurs variables ; suites ; Python.</i>	<i>2</i>
3 Problème	3
<i>Thèmes abordés : probabilités discrètes ; variables à densité ; intégrales généralisées ; applications linéaires ; Python.</i>	<i>3</i>

1 Exercice 1

Thèmes abordés : algèbre bilinéaire ; réduction ; applications linéaires.

On note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes à n lignes à coefficients réels, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels, et tU la transposée d'une matrice U . Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\ker(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 0\}, \quad \text{Im}(M) = \{MX \mid X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}.$$

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$ et l'on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et un entier naturel non nul k tels que $A^k = {}^tA$. On pose $B = {}^tAA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer tB et établir que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\langle BX, X \rangle = \|AX\|^2.$$

2. Démontrer que toutes les valeurs propres de B sont réelles et positives.
3. Prouver que $B^k = B$. Quelles sont les valeurs propres possibles de B ?
4. Justifier que $B^2 = B$.
5. Montrer que $\ker(B) = \ker(A)$, puis que $\text{Im}(B) = \text{Im}(A)$.
6. Établir que, pour tout $X \in \text{Im}(A)$, $\|AX\| = \|X\|$.

2 Exercice 2

Thèmes abordés : fonctions de plusieurs variables ; suites ; Python.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \frac{1}{5} \left[x^2(1 - x^2) + y^2(1 - y^2) + 2xy \right],$$

et la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1}), \quad (u_0, u_1) \in [0, 1]^2.$$

1. **Étude de f .**

- a) Si (a, b) est un point critique de f , justifier que $a = b$, puis déterminer tous les points critiques de f ainsi que la valeur de f en chacun de ces points critiques.

On admettra dans toute la suite que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) \leq \frac{2}{5}(x^2 + y^2) - \frac{1}{10}(x^2 + y^2)^2.$$

- b) Préciser le ou les extrémums de la fonction $g : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{2t}{5} - \frac{t^2}{10}$.
 - c) Démontrer que la fonction f possède un maximum et qu'elle n'est pas minorée.
2. **Programmation de $(u_n)_{n \geq 0}$.** Écrire une fonction Python qui demande à l'utilisateur un entier N ainsi que les valeurs initiales u_0, u_1 , et calcule la valeur correspondante u_N .

```
def terme_u(N, u0, u1):
    if N == 0:
        return u0
    if N == 1:
        return u1
    u, v = u0, u1
    for _ in range(N - 1):
        u, v = v, (u**2 * (1 - u**2) + v**2 * (1 - v**2) + 2*u*v) / 5
    return v
```

3. **Étude de la suite** $(u_n)_{n \geq 0}$. On considère la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{2}{5}(a_n + a_{n+1}), \quad a_0 = u_0 \text{ et } a_1 = u_1.$$

- Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq 1$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} \leq \frac{2}{5}(u_n + u_{n+1})$.
- Justifier que, pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq a_n$.
- Établir l'existence de quatre réels λ, μ, r, s tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \lambda r^n + \mu s^n$, puis étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

3 Problème

Thèmes abordés : probabilités discrètes ; variables à densité ; intégrales généralisées ; applications linéaires ; Python.

Soit x un réel ; on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière, c'est-à-dire l'unique entier N tel que $N \leq x < N + 1$. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On définit la *discrétisée* de X , notée X_d , par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X_d(\omega) = \lfloor X(\omega) \rfloor.$$

Partie I : Calculs de discrétisées

- Programmation.** La fonction Python `floor(x)` renvoie la partie entière du réel x et la fonction `random()` renvoie un réel aléatoire de $[0, 1[$ suivant la loi uniforme sur cet intervalle. On rappelle que si Z suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, alors, pour $a \in \mathbb{R}_+$, aZ suit la loi uniforme sur $[0, a]$.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, a]$ ($a \in \mathbb{R}_+$) et X_d sa discrétisée. Écrire une fonction Python qui, à un réel a positif fourni par l'utilisateur, renvoie une réalisation de X_d .

```
from random import random
from math import floor

def discretisee_uniforme(a):
    return floor(a * random())
```

- Soit X une variable aléatoire possédant une densité f . Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(X_d = k) = \int_k^{k+1} f(x) dx.$$

3. Soit N un entier naturel non nul et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, N]$. Déterminer la loi de X_d (on précisera les valeurs prises par X_d).
4. Établir que l'on définit bien une variable aléatoire discrète Y en posant

$$Y(\Omega) = \{1, 2, \dots, 9\}, \quad \forall k \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{\ln(10)} \ln \left(\frac{k+1}{k} \right).$$

Proposer une densité f telle que, si une variable aléatoire X possède f pour densité, alors sa discrétisée X_d suit la loi de Y .

5. Soient X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et n un entier naturel non nul. On pose $Y_n = \frac{\lfloor nX \rfloor}{n}$.
 - a) Justifier que la variable nX possède une densité f_n , que l'on précisera.
 - b) Donner la loi de la variable $\lfloor nX \rfloor$. Vérifier que $\lfloor nX \rfloor + 1$ suit une loi connue, dont on donnera le nom et le paramètre.
 - c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Prouver que

$$\mathbb{P}(Y_n \leq x) = 1 - \exp \left(-\frac{\lambda(\lfloor nx \rfloor + 1)}{n} \right).$$

- d) Donner un encadrement simple de $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$, puis montrer que la suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on précisera la loi.

Partie II : Discrétisées et lois « polynomiales »

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients réels de degré au plus n et, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on pose $e_k : x \in \mathbb{R} \mapsto x^k$. Si $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $u(Q)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(Q)(x) = \int_x^{x+1} Q(t) dt.$$

1. Pour tout entier $k \in \{0, \dots, n\}$, calculer $u(e_k)$, puis exprimer $u(e_k)$ en fonction de $e_0, \dots, e_n$.
2. Établir la linéarité de u et justifier que si $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $u(Q) \in \mathbb{R}_n[X]$.
3. Établir que la famille $(u(e_k))_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Justifier que, pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique polynôme $Q_R \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R(x) = \int_x^{x+1} Q_R(t) dt.$$

5. En considérant $n = 1$, expliciter Q_R lorsque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $R(x) = \frac{x}{6}$.
6. Soient N un entier naturel et X une variable aléatoire dont f est une densité.
 - a) On suppose qu'il existe un entier naturel n et un polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} Q(x) & \text{si } x \in [0, N+1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Établir l'existence d'un polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$X_d(\Omega) = \{0, \dots, N\}, \quad \forall k \in X_d(\Omega), \quad \mathbb{P}(X_d = k) = R(k).$$

b) On considère la variable aléatoire discrète Y définie par

$$Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}, \quad \forall k \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = k) = \frac{k}{6}.$$

Montrer qu'il n'existe aucun polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f(x) = Q(x)$ pour tout $x \in [0, 4[$ et tel que Y soit la discrétisée de X . *Indication : procéder par l'absurde et constater que l'une des propriétés des densités n'est pas satisfaite.*

Partie III : Variables dénombrables et discrétisées

On considère une variable aléatoire Y définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ainsi qu'une fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui soit de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et telles que

$$Y(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y = k) = g(k).$$

En particulier, la série $\sum_{k \geq 0} g(k)$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} g(k) = 1$. On suppose en outre que g est décroissante et qu'il existe un réel $C \geq 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |g'(x)| \leq \frac{C}{(1+x)^2} \quad \text{et} \quad |g''(x)| \leq \frac{C}{(1+x)^2}.$$

Pour tout réel x , on pose

$$f(x) = \begin{cases} -\sum_{k=0}^{+\infty} g'(x+k) & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Prouver la convergence de la série $\sum_{k \geq 0} g'(x+k)$. Quel est le signe de f ?
2. a) Établir que, pour tous $(x, a) \in (\mathbb{R}_+)^2$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|g'(x+k) - g'(a+k)| \leq \frac{C|x-a|}{(k+1)^2}.$$

- b) Prouver l'existence d'un réel $D \geq 0$ tel que, pour tous $(x, a) \in (\mathbb{R}_+)^2$,

$$|f(x) - f(a)| \leq D|x-a|.$$

Justifier la continuité de f en tout réel $a \in \mathbb{R}_+$.

3. Soit t un réel positif. Pour tout entier N , on pose

$$S_N(t) = -\sum_{k=0}^N g'(t+k), \quad R_N(t) = -\sum_{k=N+1}^{+\infty} g'(t+k).$$

- a) Démontrer que, pour tout $k \geq 1$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\frac{1}{(t+k+1)^2} \leq \frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1},$$

puis que, pour tout $N \geq 0$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|R_N(t)| \leq \frac{C}{N+1}$.

- b) Prouver que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 f(t) dt = g(0) - g(N+1) + \int_0^1 R_N(t) dt.$$

c) Justifier que $\lim_{k \rightarrow +\infty} g(k) = 0$ et que

$$\int_0^1 f(t) \, dt = g(0).$$

4. a) Vérifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f(t+1) - f(t) = g'(t)$, puis que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \int_x^{x+1} f(t) \, dt.$$

b) Pour tout entier $N \geq 0$, on pose $S_N = \int_0^N f(t) \, dt$. Établir que, pour tout $N \geq 1$,

$$S_N = \sum_{k=0}^{N-1} g(k),$$

puis que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$S_{[x]} \leq \int_0^x f(t) \, dt \leq S_{[x]+1}.$$

En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) \, dt$ et préciser sa valeur.

c) Démontrer que f peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire X et que sa discrétisée X_d suit la même loi que Y .