

EDHEC

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2013

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Exercice 1

Exercice 1 – Séries de terme général $\frac{n}{a_1 + \dots + a_n}$

$(a_n)_{n \geq 1}$ strictement positive, $\sum \frac{1}{a_n}$ convergente, $A_n = a_1 + \dots + a_n$ et $u_n = \frac{n}{A_n}$.

Corrigé – Exercice 1.

1. Premier exemple : $a_n = n(n+1)$.

a) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{a_n}$. Les sommes partielles sont télescopiques :

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1.$$

$$\sum \frac{1}{a_n} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = 1.$$

b) $A_n = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+4)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

$$u_n = \frac{3}{(n+1)(n+2)}.$$

c) $u_n = 3 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$, donc $\sum_{n=1}^N u_n = 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2} \right) \rightarrow \frac{3}{2}$.

$$\sum u_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{3}{2} \leq 2 = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}.$$

2. Deuxième exemple : $a_n = n!$.

a) On calcule le produit $2 \times 3 \times \dots \times n$ par une boucle :

```
def fact(n):
    p = 1
    for k in range(2, n + 1):
        p = p * k
    return p
```

b) On calcule $A_n = 1! + 2! + \dots + n!$, puis on renvoie $\frac{n}{A_n}$:

```
def u(n):
    s = 0
    for k in range(1, n + 1):
        s = s + fact(k)
    return n / s
```

c) On reconnaît la série exponentielle : $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout réel x , de somme e^x . Pour $x = 1$:

$$\sum \frac{1}{n!} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e - 1.$$

d) Tous les termes de A_n sont positifs, donc $A_n \geq n!$, d'où

$$u_n = \frac{n}{A_n} \leq \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}.$$

e) On a $0 \leq u_n \leq \frac{1}{(n-1)!}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!}$ converge, de somme e . Par le critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq e$. Or $e \leq 2(e-1)$, puisque cela équivaut à $e \geq 2$.

$$\sum u_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq e \leq 2(e-1) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}.$$

3. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, on pose $x = (\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n})$ et $y = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{2}{\sqrt{a_2}}, \dots, \frac{n}{\sqrt{a_n}}\right)$. Alors $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n k$, $\|x\|^2 = A_n$ et $\|y\|^2 = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz $\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$ donne :

$$(1 + 2 + \dots + n)^2 \leq (a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \dots + \frac{n^2}{a_n} \right).$$

4. Cas général.

a) On pose $B_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k}$. Comme $1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, on obtient $\frac{n^2(n+1)^2}{4} \leq A_n B_n$. Comme $A_n > 0$, on a $\frac{1}{A_n} \leq \frac{4B_n}{n^2(n+1)^2}$. On multiplie par $2n+1 > 0$ et on remarque que

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

$$\frac{2n+1}{A_n} \leq 4 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k}.$$

b) On somme pour n de 1 à N et on intervertit les sommes finies ($1 \leq k \leq n \leq N$). La somme intérieure en n est télescopique :

$$\sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{A_n} \leq 4 \sum_{k=1}^N \frac{k^2}{a_k} \sum_{n=k}^N \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = 4 \sum_{k=1}^N \frac{k^2}{a_k} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(N+1)^2} \right).$$

Chaque terme $\frac{k^2}{a_k} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(N+1)^2} \right)$ est majoré par $\frac{1}{a_k}$.

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{a_1 + \dots + a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^N \frac{1}{a_k}.$$

c) On note $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}$. Les termes $\frac{1}{a_k}$ sont positifs, donc les sommes partielles de $\sum \frac{2n+1}{A_n}$ sont majorées par $4S$. Une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées converge, donc $\sum \frac{2n+1}{A_n}$ converge. Ensuite, $u_n = \frac{n}{A_n} \leq \frac{2n+1}{2A_n}$, donc

$$\sum_{n=1}^N u_n \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{A_n} \leq 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{a_k} \leq 2S.$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum u_n$ sont donc majorées : elle converge, et un passage à la limite donne le résultat.

$$\sum u_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}.$$

Exercice 2

Exercice 2 – Hyperplans stables

E de dimension $n \geq 2$, $f \in \mathcal{L}(E)$.

Corrigé – Exercice 2.

1. Premier exemple.

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique. Alors $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = e_1$ et $f(e_3) = 2e_1 + 3e_2$, donc

$$\text{Im } f = \text{Vect}(e_1, 2e_1 + 3e_2) = \text{Vect}(e_1, e_2).$$

La famille (e_1, e_2) est libre, donc $\dim \text{Im } f = 2 = 3 - 1$. Pour $y \in \text{Im } f$, $f(y)$ est encore une image par f , donc $f(y) \in \text{Im } f$.

$$\text{Im } f = \text{Vect}(e_1, e_2) \text{ est un hyperplan de } \mathbb{R}^3 \text{ stable par } f.$$

2. Deuxième exemple.

a) On a $M - I_3 = J$, où toutes les entrées de J valent 1. Comme $\text{rg } J = 1 < 3$, 1 est valeur propre de f , et le théorème du rang donne $\dim \ker(f - \text{Id}) = 2$. Par ailleurs,

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } 4 \text{ est valeur propre de } f, \text{ et son sous-espace propre est}$$

de dimension au moins 1. La somme des dimensions des sous-espaces propres est majorée par 3, donc ces dimensions valent exactement 2 et 1, et il n'y a pas d'autre valeur propre.

$$\text{Sp}(f) = \{1, 4\}.$$

- b) Par a), $\ker(f - \text{Id}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ est de dimension 2 : c'est un hyperplan. Si $f(v) = v$, alors $f(f(v)) = f(v)$, donc $f(v) \in \ker(f - \text{Id})$.

$\ker(f - \text{Id})$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ stable par f .

3. L'endomorphisme f^* .

On note A la matrice de f dans $\mathcal{B}$ et X, Y les colonnes des coordonnées de x, y dans $\mathcal{B}$. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormale, $\langle x, y \rangle = {}^tXY$.

- a) $\langle f(x), y \rangle = {}^t(AX)Y = {}^tX {}^tAY = {}^tX({}^tAY) = \langle x, f^*(y) \rangle$, car ${}^tAY$ est la colonne des coordonnées de $f^*(y)$.

$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle.$

- b) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant la même relation. Pour tous x, y , on a $\langle x, f^*(y) - g(y) \rangle = 0$. Avec $x = f^*(y) - g(y)$, on obtient $\|f^*(y) - g(y)\|^2 = 0$, donc $g(y) = f^*(y)$ pour tout y .

f^* est l'unique endomorphisme vérifiant cette relation.

4. Existence d'un hyperplan stable.

- a) λ est valeur propre de f , donc $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible. Une matrice est inversible si et seulement si sa transposée l'est. Ainsi ${}^t(A - \lambda I_n) = {}^tA - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

λ est valeur propre de f^* .

- b) On a $u \neq 0$, donc $\dim \text{Vect}(u) = 1$, et $\dim(\text{Vect}(u))^\perp = n-1$ car $\dim F + \dim F^\perp = n$ dans un espace euclidien. Soit $x \in (\text{Vect}(u))^\perp$. Alors

$$\langle f(x), u \rangle = \langle x, f^*(u) \rangle = \lambda \langle x, u \rangle = 0,$$

donc $f(x) \in (\text{Vect}(u))^\perp$.

$(\text{Vect}(u))^\perp$ est un hyperplan de E stable par f .

Exercice 3

Exercice 3 – Maximum de variables sans espérance

$f(x) = \frac{1}{2x^2}$ si $|x| \geq 1$, 0 sinon ; $S_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $Y_n = \frac{S_n}{n}$.

Corrigé – Exercice 3.

1. Densité.

f est positive et continue sur $\mathbb{R}$, sauf en ± 1 . On a $\int_1^A \frac{dx}{2x^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{A}\right) \rightarrow \frac{1}{2}$ lorsque $A \rightarrow +\infty$, donc $\int_1^{+\infty} f$ converge et vaut $\frac{1}{2}$. Par parité de f , $\int_{-\infty}^{-1} f = \frac{1}{2}$. Comme f est

nulle sur $] -1, 1[$, on obtient $\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1$.

f est une densité de probabilité.

2. Fonction de répartition F .

Pour $x \leq -1$, $F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{dt}{2t^2} = -\frac{1}{2x}$. Pour $-1 \leq x \leq 1$, $F(x) = F(-1) = \frac{1}{2}$. Pour $x \geq 1$, $F(x) = \frac{1}{2} + \int_1^x \frac{dt}{2t^2} = 1 - \frac{1}{2x}$.

$$F(x) = -\frac{1}{2x} \quad (x \leq -1), \quad F(x) = \frac{1}{2} \quad (-1 \leq x \leq 1), \quad F(x) = 1 - \frac{1}{2x} \quad (x \geq 1).$$

3. Fonction de répartition G_n .

On a $[Y_n \leq x] = [S_n \leq nx] = \bigcap_{k=1}^n [X_k \leq nx]$. Les X_k sont mutuellement indépendantes, donc $G_n(x) = F(nx)^n$.

$$G_n(x) = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2nx}\right)^n & \text{si } x \leq -\frac{1}{n}, \\ \frac{1}{2^n} & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ \left(1 - \frac{1}{2nx}\right)^n & \text{si } x \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

4. Majorations.

a) G_n est une fonction de répartition, donc croissante. Pour $x \leq 0$:

$$G_n(x) \leq G_n(0) = \frac{1}{2^n}.$$

b) Soit $x > 0$. On pose $n_0 = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$. Alors $n_0 > \frac{1}{x}$, et pour $n \geq n_0$, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < x$. Pour ces n , on a $x \geq \frac{1}{n}$, et la question 3 donne :

$$\forall x > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, \quad G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{2nx}\right)^n.$$

5. Convergence en loi.

a) Pour $x \leq 0$, $0 \leq G_n(x) \leq \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$. Pour $x > 0$ et $n \geq n_0$, on a $G_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{2nx}\right)\right)$. Comme $\ln(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} h$, l'exposant est équivalent à $n \times \left(-\frac{1}{2nx}\right) = -\frac{1}{2x}$. Par continuité de l'exponentielle :

$$G(x) = 0 \quad (x \leq 0), \quad G(x) = e^{-1/(2x)} \quad (x > 0).$$

b) On vérifie les propriétés d'une fonction de répartition à densité :

- G est continue sur $] -\infty, 0]$ et sur $]0, +\infty[$, et $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/(2x)} = 0 = G(0)$, donc G est continue sur $\mathbb{R}$.
- G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, avec $G'(x) = \frac{e^{-1/(2x)}}{2x^2} > 0$ pour $x > 0$ et $G'(x) = 0$ pour $x < 0$, donc G est croissante.
- $\lim_{-\infty} G = 0$ et $\lim_{+\infty} G = e^0 = 1$.

G est la fonction de répartition d'une variable à densité.

- c) Pour tout réel x , donc en particulier en tout point de continuité de G , on a $G_n(x) \rightarrow G(x)$.

$Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$, où Y a pour fonction de répartition G .

6. Loi de $\frac{1}{Y}$.

$\mathbb{P}(Y \leq 0) = G(0) = 0$, donc $Y > 0$ presque sûrement et $Z = \frac{1}{Y}$ est bien définie presque sûrement, à valeurs strictement positives. Pour $z \leq 0$, $\mathbb{P}(Z \leq z) = 0$. Pour $z > 0$, G est continue, donc

$$\mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}\left(Y \geq \frac{1}{z}\right) = 1 - G\left(\frac{1}{z}\right) = 1 - e^{-z/2}.$$

$$\frac{1}{Y} \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Problème

Problème – Partie I – Intégrales de Wallis

$$u_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt.$$

Corrigé – Problème.

1. Premières propriétés.

- a) $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et $u_1 = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1$.

$$u_0 = \frac{\pi}{2}, \quad u_1 = 1.$$

- b) Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin t \leq 1$, donc $(\sin t)^{n+1} \leq (\sin t)^n$. Par croissance de l'intégrale (bornes dans l'ordre croissant) :

$$u_{n+1} \leq u_n : (u_n) \text{ est décroissante.}$$

- c) La fonction $t \mapsto (\sin t)^n$ est continue et positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et elle n'est pas identiquement nulle (elle vaut 1 en $\frac{\pi}{2}$). Les bornes sont dans l'ordre croissant, donc $u_n > 0$. Ainsi (u_n) est décroissante et minorée par 0 ; par le théorème de la limite monotone :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0, \quad \text{et } (u_n) \text{ converge.}$$

2. Relation de récurrence.

- a) Les fonctions $t \mapsto (\sin t)^{n+1}$ et $t \mapsto -\cos t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$. On intègre par parties :

$$u_{n+2} = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{n+1} \sin t dt = \left[-\cos t (\sin t)^{n+1} \right]_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 t (\sin t)^n dt.$$

Le crochet est nul et $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$, donc $u_{n+2} = (n+1)(u_n - u_{n+2})$.

$$(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n.$$

- b) Par récurrence sur n . Pour $n = 0$, $\frac{0!}{(2^0 0!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = u_0$. On suppose la formule vraie au rang n . Par a), avec $2n$:

$$u_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} u_{2n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n+2)^2} \cdot \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

- c) On pose $v_n = (n+1)u_{n+1}u_n$. Par a), $v_{n+1} = (n+2)u_{n+2}u_{n+1} = (n+1)u_n u_{n+1} = v_n$. La suite (v_n) est donc constante, égale à $v_0 = u_1 u_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}.$$

- d) On applique c) avec $2n$, puis b) :

$$u_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)u_{2n}} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)(2n)!}.$$

$$u_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

3. Équivalent.

- a) On a $u_n > 0$ et, par 2a), $\frac{u_{n+2}}{u_n} = \frac{n+1}{n+2}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+2}}{u_n} = 1.$$

- b) La suite est décroissante, donc $u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq u_n$. On divise par $u_n > 0$: $\frac{u_{n+2}}{u_n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$. Par le théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

- c) Par 2c), $u_n^2 = \frac{\pi}{2(n+1)} \cdot \frac{u_n}{u_{n+1}}$. Or $\frac{u_n}{u_{n+1}} \rightarrow 1$ et $n+1 \sim n$, donc $u_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$. Comme $u_n > 0$, on passe à la racine carrée (compatible avec les équivalents) :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Problème – Partie II – Étude de $I(x)$

$$I(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Corrigé – Problème.**1. Convergence.**

$g : t \mapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et positive sur $] -1, 1[$. On écrit $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-t}\sqrt{1+t}$, d'où

$$g(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{e^{-x}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(1-t)^{1/2}}, \quad g(t) \underset{t \rightarrow -1}{\sim} \frac{e^x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(1+t)^{1/2}}.$$

Ce sont des intégrales de Riemann convergentes (exposant $\frac{1}{2} < 1$). Par le critère d'équivalence pour les fonctions positives :

$$\boxed{I(x) \text{ converge pour tout réel } x.}$$

2. Deux inégalités.

- a) Pour $t \in [0, 1[$ et $x > 0$, $0 < e^{-xt} \leq 1$, donc $0 \leq g(t) \leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. On fait le changement de variable $t = \sin \theta : \theta \mapsto \sin \theta$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[0, 1[$, donc les deux intégrales sont de même nature. Comme $\sqrt{1-\sin^2 \theta} = \cos \theta > 0$:

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{\cos \theta} d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

$$\boxed{0 \leq \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq M = \frac{1}{2}.$$

- b) Pour $u \in [0, \frac{1}{2}]$, $1-u \in [\frac{1}{2}, 1]$, donc $\sqrt{1-u} \leq 1$ et $\frac{1}{\sqrt{1-u}} \geq 1$. Pour l'autre inégalité, les deux membres étant positifs,

$$\frac{1}{\sqrt{1-u}} \leq 1+u \iff 1 \leq (1+u)^2(1-u) = 1+u-u^2-u^3 \iff u(1-u-u^2) \geq 0.$$

La dernière inégalité est vraie, car $u+u^2 \leq \frac{3}{4} < 1$.

$$\boxed{\forall u \in [0, \frac{1}{2}], \quad 1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-u}} \leq 1+u.}$$

3. Intégrales auxiliaires.

- a) La densité de $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$ est $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, et $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \mathbb{E}(Z^2) = \sqrt{\pi} \mathbb{V}(Z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Les fonctions intégrées sont paires, donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

- b) L'intégrale converge en 0, car $0 \leq \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$ (Riemann). On fait le changement de variable $t = \frac{u^2}{x} : u \mapsto \frac{u^2}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $]0, \sqrt{x}]$ sur $]0, 1]$, donc les intégrales sont de même nature. On a $dt = \frac{2u}{x} du$ et $\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{x}}{u}$, d'où

$$\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2} du.$$

Comme $\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2} du \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} \neq 0$:

$$\boxed{\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{x}}.}$$

c) Avec le même changement de variable (ici sur un segment, $\sqrt{t} = \frac{u}{\sqrt{x}}$) :

$$\int_0^1 e^{-xt} \sqrt{t} dt = \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2} \frac{u}{\sqrt{x}} \cdot \frac{2u}{x} du = \frac{2}{x\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} u^2 e^{-u^2} du.$$

Comme cette dernière intégrale tend vers $\frac{\sqrt{\pi}}{4} \neq 0$:

$$\boxed{\int_0^1 e^{-xt} \sqrt{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}.}$$

4. Équivalent de $I(x)$.

a) On fait le changement de variable affine $t = u - 1$, bijection $\mathcal{C}^1$ de $]0, 1]$ sur $] -1, 0]$ (intégrales de même nature). On a $1 - t^2 = (1 - t)(1 + t) = (2 - u)u = 2u(1 - \frac{u}{2})$ et $e^{-xt} = e^x e^{-xu}$, d'où :

$$\boxed{\int_{-1}^0 \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u(1-\frac{u}{2})}} du.}$$

b) On note $J(x)$ l'intégrale de droite, $A(x) = \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} du$ et $B(x) = \int_0^1 e^{-xu} \sqrt{u} du$. Pour $u \in]0, 1]$, $\frac{u}{2} \in [0, \frac{1}{2}]$, donc 2b) donne $1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-u/2}} \leq 1 + \frac{u}{2}$. On multiplie par $\frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} > 0$ et on intègre :

$$A(x) \leq J(x) \leq A(x) + \frac{1}{2}B(x).$$

Par 3b) et 3c), $\frac{B(x)}{A(x)} \sim \frac{1}{2x} \rightarrow 0$, donc $\frac{J(x)}{A(x)} \rightarrow 1$, c'est-à-dire $J(x) \sim A(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{x}}$. On décompose

$$I(x) = \frac{e^x}{\pi\sqrt{2}} J(x) + R(x), \quad \text{avec } 0 \leq R(x) \leq \frac{1}{2} \text{ par 2a).}$$

Le premier terme est équivalent à $\frac{e^x}{\pi\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{x}} = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$, qui tend vers $+\infty$. Donc $R(x)$ est négligeable devant ce terme, et :

$$\boxed{I(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}.}$$

Problème – Partie III – Application probabiliste

X, Y indépendantes de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

Corrigé – Problème.**1. Expression de $\mathbb{P}(X = Y)$.**

$([X = k])_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, donc $[X = Y] = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} ([X = k] \cap [Y = k])$, union d'événements deux à deux incompatibles. Par σ -additivité, puis par indépendance de X et Y :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = k) = e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}.$$

2. Développement de $I(x)$ en série.

- a) Soient $t \in [-1, 1]$ et $x > 0$. Pour u compris entre 0 et $-tx$, $u \leq |u| \leq |tx| \leq x$, et l'exponentielle est croissante, donc $e^u \leq e^x$. La fonction $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^{2n+1}$ et toutes ses dérivées sont égales à $\exp$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ entre 0 et $-tx$ donne :

$$\left| e^{-tx} - \sum_{j=0}^{2n} \frac{(-tx)^j}{j!} \right| \leq \frac{|t|^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} e^x.$$

- b) On fait le changement de variable $t = \sin \theta$, bijection $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[0, 1[$ (intégrales de même nature) :

$$\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin \theta)^k \cos \theta}{\cos \theta} d\theta = u_k.$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt = u_k.$$

- c) Les intégrales $\int_{-1}^1 \frac{t^j}{\sqrt{1-t^2}} dt$ convergent, car $|t^j| \leq 1$ (question II.1). Pour j impair, l'intégrande est impaire, donc l'intégrale est nulle. Pour $j = 2k$, elle vaut $2u_{2k}$ par parité et b). Avec I.2b) :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(-tx)^{2k}}{(2k)! \sqrt{1-t^2}} dt = \frac{2x^{2k} u_{2k}}{\pi(2k)!} = \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}.$$

Donc $\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sum_{j=0}^{2n} \frac{(-tx)^j}{j!} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}$. Par linéarité, inégalité triangulaire et a) :

$$\left| I(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} \right| \leq \frac{x^{2n+1} e^x}{\pi(2n+1)!} \int_{-1}^1 \frac{|t|^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{x^{2n+1} e^x}{\pi(2n+1)!} \cdot 2u_{2n+1}.$$

$$\left| I(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}} \right| \leq \frac{2x^{2n+1} e^x}{\pi(2n+1)!} u_{2n+1}.$$

- d) (u_n) est décroissante, donc $u_{2n+1} \leq u_0 = \frac{\pi}{2}$, et le majorant de c) est inférieur à $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} e^x$. Ce majorant tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$: c'est le terme général de la série exponentielle, qui converge. Donc les sommes partielles convergent vers $I(x)$:

$$\forall x > 0, \quad I(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}.$$

3. Équivalent de $\mathbb{P}(X = Y)$.

On a $\frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2} = \frac{(2\lambda)^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}$, donc par 1 et 2d), $\mathbb{P}(X = Y) = e^{-2\lambda} I(2\lambda)$. Lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$, $2\lambda \rightarrow +\infty$, et II.4b) donne

$$I(2\lambda) \sim \frac{e^{2\lambda}}{\sqrt{4\pi\lambda}} = \frac{e^{2\lambda}}{2\sqrt{\pi\lambda}}.$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X = Y) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}.}$$