emlyon business school

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2013

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Problème 1

Problème 1 – Partie I – Étude de $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$

$x > 0$.

Corrigé – Problème 1.

1. **Convergence.**

   Pour $x > 0$, $t \mapsto \frac{e^{-t}}{x+t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et vérifie $0 \leqslant \frac{e^{-t}}{x+t} \leqslant \frac{e^{-t}}{x}$. Or $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge (et vaut 1). Par le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives :

   $$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt \text{ converge.}}$$

2. **Limite en 0^+.**

   L'intégrande est positif, donc $f(x) \geqslant \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$. Pour $t \in [0,1]$, $e^{-t} \geqslant e^{-1}$, d'où

   $$f(x) \geqslant \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,dt = e^{-1} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

   Ce minorant tend vers $+\infty$ lorsque $x \to 0^+$.

   $$\boxed{f(x) \geqslant \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,dt \qquad \text{et} \qquad f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty.}$$

3. **Limite en $+\infty$.**

   L'intégrande est continu, strictement positif, et les bornes sont dans l'ordre croissant, donc $f(x) > 0$. D'après la majoration de la question 1, $f(x) \leqslant \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \frac{1}{x}$. Par encadrement :

   $$\boxed{0 < f(x) \leqslant \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.}$$

4. **Équivalent en $+\infty$.**

   $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt$ est l'espérance d'une variable de loi $\mathcal{E}(1)$: elle converge et vaut 1. Par linéarité des intégrales convergentes,

   $$f(x) - \frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x}\right)dt = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{x(x+t)}\,dt.$$

Pour $t \geqslant 0$, on a $0 \leqslant \frac{te^{-t}}{x(x+t)} \leqslant \frac{te^{-t}}{x^2}$, d'où

$$\boxed{\left|f(x) - \frac{1}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt = \frac{1}{x^2}.}$$

Ainsi $|xf(x) - 1| \leqslant \frac{1}{x} \to 0$:

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.}$$

Problème 1 – Partie II – Une autre expression intégrale de f

$g(x) = e^{-x}f(x)$.

Corrigé – Problème 1.

5. Taux d'accroissement.

a) L'intégrande est continu sur $[0, +\infty[$ et $0 \leqslant \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} \leqslant \frac{e^{-t}}{x^2}$. Par comparaison avec $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt \text{ converge.}}$$

b) Pour $t \geqslant 0$, on a $x + h + t > \frac{x}{2} > 0$. On réduit au même dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2} &= -\frac{1}{(x+h+t)(x+t)} + \frac{1}{(x+t)^2}\\ &= \frac{h}{(x+h+t)(x+t)^2}.\end{aligned}$$

Comme $x + h + t > \frac{x}{2}$ et $x + t \geqslant x$, la valeur absolue est majorée par $\frac{|h|}{\frac{x}{2}x^2}$.

$$\boxed{\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right| \leqslant \frac{2|h|}{x^3}.}$$

c) On a $x + h > 0$, donc $f(x + h)$ est défini. Par linéarité des intégrales convergentes,

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt&\\ = \int_0^{+\infty} e^{-t}\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t}\right) + \frac{1}{(x+t)^2}\right]dt.&\end{aligned}$$

Par l'inégalité triangulaire et b), cette quantité est majorée en valeur absolue par $\frac{2|h|}{x^3}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$.

$$\boxed{\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt\right| \leqslant \frac{2|h|}{x^3}.}$$

6. Dérivabilité.

Pour $x > 0$ fixé, le majorant $\frac{2|h|}{x^3}$ tend vers 0 quand $h \to 0$ (avec $h \neq 0$ et $h > -\frac{x}{2}$). Le taux d'accroissement a donc une limite finie.

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et } f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt.}$$

7. Intégration par parties.

Les fonctions $t \mapsto e^{-t}$ et $t \mapsto -\frac{1}{x+t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\varepsilon, A]$, et $\left(-\frac{1}{x+t}\right)' = \frac{1}{(x+t)^2}$. On intègre par parties :

$$\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt = \left[-\frac{e^{-t}}{x+t}\right]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt.$$

$$\boxed{\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} - \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt.}$$

8. Équation différentielle d'ordre 1.

On fait tendre $\varepsilon \to 0^+$ et $A \to +\infty$. Les deux intégrales convergent (questions 1 et 5a), $\frac{e^{-A}}{x+A} \to 0$ et $\frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} \to \frac{1}{x}$. On obtient $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt = \frac{1}{x} - f(x)$, puis, par la question 6 :

$$\boxed{\forall x > 0, \quad f'(x) = -\frac{1}{x} + f(x).}$$

9. Dérivée seconde.

f est dérivable, donc continue, et $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Par la question 8, $x \mapsto f'(x) = f(x) - \frac{1}{x}$ est donc continue et dérivable, avec $f''(x) = f'(x) + \frac{1}{x^2}$. Cette expression est continue, donc :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et } f''(x) = \frac{1}{x^2} + f'(x).}$$

10. Dérivée de g.

g est dérivable comme produit de fonctions dérivables, et par la question 8 :

$$g'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) = e^{-x}\left(-\frac{1}{x}\right).$$

$$\boxed{\forall x > 0, \quad g'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}.}$$

11. Nouvelle expression de f.

Soient $0 < x < B$. Comme g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, B]$ (car g' est continue),

$$\int_x^B \frac{e^{-u}}{u}\,du = -\int_x^B g'(u)\,du = g(x) - g(B).$$

Par la question 3, $0 \leqslant g(B) \leqslant \frac{e^{-B}}{B} \to 0$ lorsque $B \to +\infty$. L'intégrale converge donc, et elle vaut $g(x)$.

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du = g(x) \qquad \text{et} \qquad f(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du.}$$

12. Équivalent.

Par 11 et 4, $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du = e^{-x}f(x) \sim e^{-x}\cdot\frac{1}{x}$.

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}.}$$

13. Nature de la série.

Par 12, $w_n = n^2\int_n^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,du \sim ne^{-n}$. Par croissances comparées, $n^2\cdot ne^{-n}\to 0$, donc $ne^{-n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Les termes sont positifs et la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^2}$ converge. Par les critères de comparaison des séries à termes positifs :

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} n^2\int_n^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,du \text{ converge.}}$$

Problème 1 – Partie III – Étude d'une densité

$h(t) = \frac{1}{f(1)}\frac{e^{-t}}{1+t}$ si $t\geqslant 0$, $h(t)=0$ sinon.

Corrigé – Problème 1.

14. Densité.

$f(1) > 0$, donc h est positive. Elle est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0, et $\int_{-\infty}^{+\infty} h = \frac{1}{f(1)}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1+t}\,dt = \frac{f(1)}{f(1)} = 1$.

$$\boxed{h \text{ est une densité de probabilité.}}$$

15. Espérance.

Pour $t\geqslant 0$, $0\leqslant th(t)\leqslant\frac{e^{-t}}{f(1)}$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} th(t)\,dt$ converge absolument (comparaison), et X admet une espérance. Comme $\frac{t}{1+t} = 1-\frac{1}{1+t}$, par linéarité des intégrales convergentes :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{f(1)}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt - \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1+t}\,dt\right) = \frac{1-f(1)}{f(1)}.$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{f(1)} - 1.}$$

Problème 2

Problème 2 – Parties I à III – Trace et matrices de rang 1

$C_j(A)$ désigne la j-ième colonne de A.

Corrigé – Problème 2.

1. Noyau de A_0.

Pour $X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, on a $A_0X = U_0({}^tV_0X)$, où ${}^tV_0X$ est un réel. Comme $U_0 \neq 0$, $A_0X = 0$ équivaut à $x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$. C'est un hyperplan de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, donc il n'est pas réduit à $\{0\}$: 0 est valeur propre. On écrit $x_4 = x_1 - x_2 + 2x_3$ et on lit une base.

$$\boxed{E_0(A_0) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right), \qquad \dim E_0(A_0) = 3.}$$

On vérifie que ces trois vecteurs annulent $x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4$; ils sont libres (en regardant les coordonnées 2, 3, 4).

2. Diagonalisation de A_0.

a) On a ${}^tV_0U_0 = 1 - 2 + 6 - 4 = 1$, donc $A_0U_0 = U_0({}^tV_0U_0) = U_0$.

$$\boxed{A_0U_0 = U_0.}$$

b) $U_0 \neq 0$, donc 1 est valeur propre de A_0 et $\dim E_1(A_0) \geqslant 1$. Avec $\dim E_0(A_0) = 3$, la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut au moins 4, donc exactement 4.

$$\boxed{A_0 \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).}$$

c) On concatène une base de $E_1(A_0)$ et une base de $E_0(A_0)$: on obtient une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres.

$$\boxed{P = \begin{pmatrix}1&1&-2&1\\2&1&0&0\\3&0&1&0\\4&0&0&1\end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, \qquad A_0 = PDP^{-1}.}$$

3. Linéarité de la trace.

Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, le coefficient diagonal (i,i) de $\lambda A + B$ est $\lambda a_{i,i} + b_{i,i}$, donc $\text{Tr}(\lambda A + B) = \lambda \,\text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$.

$$\boxed{\text{Tr} \text{ est une forme linéaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

4. Trace d'un produit.

On calcule les coefficients diagonaux des deux produits, puis on échange les deux sommes finies :

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{k,i}a_{i,k} = \text{Tr}(BA).$$

$$\boxed{\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).}$$

5. Trace de ${}^tAA$.

Le coefficient (j,j) de ${}^tAA$ est $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}a_{i,j}$.

$$\boxed{\text{Tr}({}^tAA) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2.}$$

6. Les matrices $U{}^tV$.

a) U est de taille $n \times 1$ et ${}^tV$ de taille $1 \times n$, donc $U{}^tV$ est de taille $n \times n$.

$$\boxed{U{}^tV \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad (U{}^tV)_{i,j} = u_i v_j.}$$

b) On somme les coefficients diagonaux $u_i v_i$:

$$\boxed{\mathrm{Tr}(U{}^tV) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.}$$

c) La colonne j de $U{}^tV$ est $v_j U$. Donc $\mathrm{Im}(U{}^tV) = \mathrm{Vect}(v_1 U, \dots, v_n U) \subset \mathrm{Vect}(U)$. Comme $V \neq 0$, il existe j tel que $v_j \neq 0$, et alors $U = \frac{1}{v_j}(v_j U)$ appartient à l'image. Ainsi l'image est $\mathrm{Vect}(U)$, de dimension 1 car $U \neq 0$.

$$\boxed{\mathrm{rg}(U{}^tV) = 1.}$$

7. Factorisation d'une matrice de rang 1.

a) Le sous-espace engendré par les colonnes de A est de dimension 1. Il existe donc une colonne non nulle $C_{j_0}(A)$ (sinon $A = 0$ serait de rang 0). Ce sous-espace est de dimension 1 et contient le vecteur non nul $C_{j_0}(A)$, donc il est égal à $\mathrm{Vect}(C_{j_0}(A))$. Chaque colonne de A appartient à ce sous-espace :

$$\boxed{\exists j_0,\ \forall j,\ \exists \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A).}$$

b) On pose $U = C_{j_0}(A) \neq 0$ et $V = (\alpha_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$. V est non nul car on peut prendre $\alpha_{j_0} = 1$. Par 6a), la colonne j de $U{}^tV$ est $\alpha_j U = C_j(A)$, donc :

$$\boxed{A = U{}^tV, \quad U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}.}$$

8. Caractérisation.

Par 6c) et 7b) :

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = 1 \iff \exists U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ A = U{}^tV.}$$

Problème 2 – Partie IV – Application en probabilités

$m_{i,j} = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$, $U_X = (\mathbb{P}(X = i))_i$, $U_Y = (\mathbb{P}(Y = i))_i$.

Corrigé – Problème 2.

9. Cas indépendant.

Le coefficient (i,j) de $U_X{}^tU_Y$ est $\mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j)$, qui vaut $m_{i,j}$ par indépendance de X et Y. Donc $M = U_X{}^tU_Y$. Les colonnes U_X et U_Y sont non nulles, car la somme de leurs coefficients vaut 1. Par 6c) :

$$\boxed{M = U_X{}^tU_Y \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(M) = 1.}$$

10. Réciproque.

a) $([Y=j])_{1\leqslant j\leqslant n}$ est un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales, pour tout i, $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = \mathbb{P}(X=i)$.

$$\boxed{C_1(M) + \cdots + C_n(M) = U_X.}$$

b) L'image de M est de dimension 1 et contient $U_X = \sum_j C_j(M)$, qui est non nul. Elle est donc égale à $\mathrm{Vect}(U_X)$, et chaque colonne $C_j(M)$ y appartient :

$$\boxed{\forall j,\ \exists \beta_j \in \mathbb{R},\quad C_j(M) = \beta_j U_X.}$$

c) On somme les coefficients de la colonne j. Par la formule des probabilités totales pour le système complet $([X=i])_i$, on a $\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = \mathbb{P}(Y=j)$. D'autre part, $\sum_{i=1}^{n} \beta_j \mathbb{P}(X=i) = \beta_j$.

$$\boxed{\forall j,\quad \mathbb{P}(Y=j) = \beta_j.}$$

d) Par b) et c), $m_{i,j} = \beta_j \mathbb{P}(X=i) = \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j)$ pour tous i, j.

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}}$$

Problème 2 – Parties V et VI – Diagonalisabilité, produit scalaire et projecteur

$A = U{}^tV$ de rang 1, $a = \mathrm{Tr}(A)$; $S = V{}^tV$ avec ${}^tVV = (1)$.

Corrigé – Problème 2.

11. Valeur propre 0.

Par le théorème du rang, $\dim \ker A = n - 1 \geqslant 1$.

$$\boxed{0 \in \mathrm{Sp}(A) \quad \text{et} \quad \dim E_0(A) = n-1.}$$

12. Relation $A^2 = aA$.

${}^tVU$ est la matrice 1×1 de coefficient $\sum_i v_i u_i = \mathrm{Tr}(U{}^tV) = a$, par 6b). Ensuite, $A^2 = U({}^tVU){}^tV = aU{}^tV$.

$$\boxed{{}^tVU = (a) \qquad \text{et} \qquad A^2 = aA.}$$

13. Cas $a = 0$.

On a alors $A^2 = 0$. Si $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, alors $0 = A^2X = \lambda^2 X$, donc $\lambda = 0$: $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc nulle. C'est absurde, car $\mathrm{rg}\, A = 1$.

$$\boxed{a = 0 \implies A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

14. Cas $a \neq 0$.

$AU = U({}^tVU) = aU$ avec $U \neq 0$: a est une valeur propre non nulle de A, et $\dim E_a(A) \geqslant 1$. Avec 11, la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut au moins $(n-1)+1 = n$.

$$\boxed{AU = aU \quad \text{et} \quad A \text{ est diagonalisable.}}$$

15. Condition nécessaire et suffisante.

Par 13 et 14 :

$$\boxed{\text{Une matrice de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.}}$$

16. Produit scalaire.

On vérifie les trois propriétés d'un produit scalaire :

- Bilinéarité : $N \mapsto \mathrm{Tr}({}^tMN)$ est linéaire, par linéarité du produit matriciel et de la trace.
- Symétrie : $\mathrm{Tr}({}^tMN) = \mathrm{Tr}({}^t({}^tMN)) = \mathrm{Tr}({}^tNM)$ (une matrice et sa transposée ont la même diagonale). La linéarité à gauche découle alors de la linéarité à droite.
- Caractère défini positif : par 5, $\langle M, M\rangle = \sum_{i,j} m_{i,j}^2 \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si tous les $m_{i,j}$ sont nuls.

$$\boxed{\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}({}^tMN) \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

17. La matrice S.

On a ${}^tS = {}^t({}^tV){}^tV = V{}^tV = S$. De plus, ${}^tVV = \left(\sum_j v_j^2\right) = (1)$, d'où $S^2 = V({}^tVV){}^tV = S$.

$$\boxed{{}^tS = S \qquad \text{et} \qquad S^2 = S.}$$

18. L'endomorphisme Φ.

a) Φ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même. Pour M, N, on a, puisque ${}^tS = S$:

$$\langle \Phi(M), N\rangle = \mathrm{Tr}({}^tM{}^tSN) = \mathrm{Tr}({}^tM(SN)) = \langle M, \Phi(N)\rangle.$$

$$\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme symétrique de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

b) $\Phi^2(M) = S^2M = SM = \Phi(M)$. Si $\Phi(M) = \lambda M$ avec $M \neq 0$, alors $\lambda M = \Phi^2(M) = \lambda^2 M$, donc $\lambda^2 = \lambda$. Les deux valeurs sont atteintes. D'une part, $\Phi(S) = S^2 = S$, avec $S \neq 0$ car $\mathrm{Tr}(S) = \sum_j v_j^2 = 1$. D'autre part, comme $n \geqslant 2$, il existe $W \neq 0$ tel que ${}^tVW = (0)$ (l'orthogonal de V pour le produit scalaire canonique est de dimension $n-1$), et alors $\Phi(W{}^tV) = V({}^tVW){}^tV = 0$ avec $W{}^tV \neq 0$.

$$\boxed{\Phi^2 = \Phi \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Sp}(\Phi) = \{0, 1\}.}$$

c) Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on écrit $M = (M - \Phi(M)) + \Phi(M)$. On a $\Phi(M - \Phi(M)) = \Phi(M) - \Phi^2(M) = 0$ et $\Phi(\Phi(M)) = \Phi(M)$, donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \ker\Phi + \ker(\Phi - e)$. Si $M \in \ker\Phi$ et $N \in \ker(\Phi - e)$, alors $\langle M, N\rangle = \langle M, \Phi(N)\rangle = \langle \Phi(M), N\rangle = 0$. Les deux sous-espaces sont donc orthogonaux, et en particulier $\ker\Phi \cap \ker(\Phi - e) = \{0\}$.

$$\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \ker\Phi \overset{\perp}{\oplus} \ker(\Phi - e).}$$