

Année : 2013

École : EMLYON

Option : Mathématiques approfondies

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Sommaire

Problème : Étude d'une fonction définie par une intégrale **2**

*Thèmes abordés : Fonctions d'une variable ; intégrales généralisées ;
séries ; variables à densité* **2**

Problème : Matrices de rang 1 **5**

*Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; applications linéaires ; réduction ;
algèbre bilinéaire ; probabilités discrètes ; couples de variables discrètes* **5**

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Problème

Étude d'une fonction définie par une intégrale

Thèmes abordés : Fonctions d'une variable ; intégrales généralisées ; séries ; variables à densité

Partie I — Étude d'une fonction f définie par une intégrale

- 1) Montrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$$

converge.

On note $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in]0, +\infty[$, par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt.$$

- 2) Montrer :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) \geq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t} dt.$$

En déduire : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$.

- 3) Montrer :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad 0 < f(x) \leq \frac{1}{x}.$$

En déduire : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

- 4) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ converge et que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \left| f(x) - \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} te^{-t} dt.$$

En déduire : $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

Partie II — Une autre expression intégrale de f

A - Dérivabilité et expression de la dérivée de f sous forme d'une intégrale

- 5) Soit $(x, h) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}^*$ tel que $h > -\frac{x}{2}$.

- a) Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$$

converge.

b) Établir :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad \left| \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right| \leq \frac{2|h|}{x^3}.$$

c) En déduire :

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt \right| \leq \frac{2|h|}{x^3}.$$

6) En déduire que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt.$$

7) Montrer, pour tout $x \in]0, +\infty[$ et tout $(\varepsilon, A) \in]0, 1] \times [1, +\infty[$,

$$\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} - \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{x+t} dt.$$

8) En déduire :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = -\frac{1}{x} + f(x).$$

9) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f''(x) = \frac{1}{x^2} + f'(x).$$

B - Intervention d'une fonction auxiliaire g

On note $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in]0, +\infty[$, par

$$g(x) = e^{-x} f(x).$$

10) Démontrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad g'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}.$$

11) Montrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$ converge et que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du,$$

puis

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

12) Montrer :

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}.$$

13) Quelle est la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du ?$$

Partie III — Étude d'une densité

On note $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{f(1)} \frac{e^{-t}}{1+t}, & \text{si } t \geq 0, \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

- 14)** Montrer que h est une densité.
- 15)** Soit X une variable aléatoire réelle admettant h pour densité. Montrer que X admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(X)$ à l'aide de $f(1)$.

Problème

Matrices de rang 1

Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; applications linéaires ; réduction ; algèbre bilinéaire ; probabilités discrètes ; couples de variables discrètes

Dans tout le problème, n est un entier tel que $n \geq 2$.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles à une colonne et n lignes, nommées « matrices colonnes » dans la suite du problème.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors tA désigne la matrice transposée de A . Si $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors tV désigne la matrice transposée de V . Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, le coefficient de la ligne numéro i et de la colonne numéro j de A est noté $a_{i,j}$, et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Si

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),$$

alors $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $C_j(A)$ la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée des coefficients de la colonne numéro j de A . Ainsi : $C_j(A) = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n}$.

Partie I — Un exemple

Soient

$$U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_0 = U_0 {}^tV_0.$$

- 1) Vérifier que 0 est valeur propre de A_0 et déterminer une base du sous-espace propre associé.
- 2)
 - a) Calculer $A_0 U_0$.
 - b) Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
 - c) Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

Partie II — Trace d'une matrice carrée

Pour toute matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A , et on note $\text{Tr}(A)$, la somme des coefficients diagonaux de A , c'est-à-dire

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

3) Montrer que l'application

$$\text{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad A \longmapsto \text{Tr}(A),$$

est linéaire.

4) Montrer :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).$$

5) Vérifier :

$$\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2.$$

Partie III — Une caractérisation des matrices de rang 1

6) Soient $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Justifier : $U {}^tV \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer les coefficients de $U {}^tV$ à l'aide des coefficients de U et de V .

b) Exprimer $\text{Tr}(U {}^tV)$ à l'aide des coefficients de U et de V .

c) Quel est le rang de $U {}^tV$?

7) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

a) Montrer qu'il existe $j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $\alpha_j \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A).$$

b) En déduire qu'il existe deux matrices colonnes non nulles U et V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U {}^tV$.

8) Énoncer une caractérisation des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

Partie IV — Une application en probabilités

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose de plus :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket.$$

On note, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$m_{i,j} = \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)),$$

puis

$$M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad U_X = (\mathbb{P}(X = i))_{1 \leq i \leq n}, \quad U_Y = (\mathbb{P}(Y = i))_{1 \leq i \leq n}.$$

9) On suppose, dans cette question, que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. Calculer $U_X {}^tU_Y$. En déduire que la matrice M est de rang 1.

10) On suppose, dans cette question, que la matrice M est de rang 1.

a) Montrer : $C_1(M) + \cdots + C_n(M) = U_X$.

b) En déduire que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $\beta_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j(M) = \beta_j U_X$.

c) Montrer :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(Y = j) = \beta_j.$$

d) En déduire que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Partie V — Une caractérisation des matrices de rang 1 diagonalisables

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note U et V deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que

$$A = U {}^t V,$$

et on note $a = \text{Tr}(A)$.

11) Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

12) Montrer : ${}^t V U = (a)$, puis $A^2 = aA$.

13) Montrer que, si $a = 0$, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

14) On suppose $a \neq 0$. Calculer AU . Déduire des questions précédentes que A est diagonalisable.

15) Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 soit diagonalisable.

Partie VI — Construction d'un produit scalaire et d'un endomorphisme symétrique

16) Montrer que l'application

$$(M, N) \mapsto \langle M, N \rangle = \text{Tr}({}^t M N)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit dorénavant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de ce produit scalaire.

On considère une matrice colonne $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\sum_{j=1}^n v_j^2 = 1$. On note $S = V {}^t V$.

17) Montrer que S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $S^2 = S$.

18) a) Montrer que l'application

$$\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad M \mapsto SM,$$

est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- b)** Vérifier que $\Phi^2 = \Phi$. Que peut-on dire des valeurs propres de Φ ?
- c)** On note e l'application identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\ker(\Phi)$ et $\ker(\Phi - e)$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.