

ESSEC

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2013

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Partie I – Construction de la fonction arctan

Partie I – La fonction arctan

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

Corrigé – Partie I.

1. Définition, parité, régularité.

$t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc arctan est bien définie sur $\mathbb{R}$. C'est la primitive de cette fonction qui s'annule en 0 : elle est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée $\frac{1}{1+x^2}$. Cette dérivée est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (inverse d'un polynôme qui ne s'annule pas), donc arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour la parité, le changement de variable $t = -u$ donne $\arctan(-x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{1+t^2} = -\int_0^x \frac{du}{1+u^2} = -\arctan x$.

$$\arctan \text{ est impaire, de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

2. Limite et bijection.

On a $0 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ pour $t \geq 1$, donc $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge (Riemann). Ainsi arctan admet en $+\infty$ la limite finie $L = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$, et par imparité sa limite en $-\infty$ est $-L$. arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (dérivée strictement positive). Par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] \lim_{-\infty}, \lim_{+\infty} [$.

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-L, L[\text{ est bijective.}$$

3. Valeur de L .

$\psi : x \mapsto \arctan(\tan x)$ est dérivable sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$. Par la formule de dérivation d'une composée,

$$\psi'(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = 1,$$

et $\psi(0) = 0$, donc $\psi(x) = x$. Quand $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$, $\tan x \rightarrow +\infty$, donc $\psi(x) \rightarrow L$, mais aussi $\psi(x) = x \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \arctan(\tan x) = x, \quad L = \frac{\pi}{2}.$$

4. Caractère 1-lipschitzien.

$\arctan$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $|\arctan'(u)| = \frac{1}{1+u^2} \leq 1$ pour tout u . L'inégalité des accroissements finis donne :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|.$$

5. Relation pour $x > 0$.

$\theta : x \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\theta'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

θ est donc constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$, égale à $\theta(1) = 2\arctan(1) = 2\arctan(\tan \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$.

$$\forall x > 0, \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Partie II – Premières propriétés de $\Phi(f)$ et de Φ **Partie II – L'opérateur Φ**

$$\Phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} \arctan(tx) \frac{f(t)}{1+t^2} dt \text{ pour } f \in E_0.$$

Corrigé – Partie II.**6. Sous-espace vectoriel.**

La fonction nulle est continue et bornée. Si $f, g \in E_0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\alpha f + g$ est continue et $|\alpha f + g| \leq |\alpha|N_0(f) + N_0(g)$, donc elle est bornée.

$$E_0 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

7. Convergence absolue.

L'intégrande est continu sur $[0, +\infty[$. Comme $|\arctan| \leq \frac{\pi}{2}$, on a

$$\left| \arctan(tx) \frac{f(t)}{1+t^2} \right| \leq \frac{\pi}{2} N_0(f) \frac{1}{1+t^2}.$$

Le majorant est intégrable sur $[0, +\infty[$ (question 2). Par le critère de comparaison :

$$\int_0^{+\infty} \arctan(tx) \frac{f(t)}{1+t^2} dt \text{ est absolument convergente.}$$

8. Majoration.

Par l'inégalité triangulaire et la question 7, $|\Phi(f)(x)| \leq \frac{\pi}{2} N_0(f) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi^2}{4} N_0(f)$ pour tout x .

$$\Phi(f) \text{ est bornée et } N_0[\Phi(f)] \leq \frac{\pi^2}{4} N_0(f).$$

9. Continuité de $\Phi(f)$.

a) Par linéarité des intégrales convergentes, puis par la relation de Chasles :

$$\Phi(f)(x+h) - \Phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} (\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)) \frac{f(t)}{1+t^2} dt.$$

On applique l'inégalité triangulaire, on utilise $|f(t)| \leq N_0(f)$ et on coupe l'intégrale en A :

$$|\Phi(f)(x+h) - \Phi(f)(x)| \leq N_0(f) \left(\int_0^A \frac{|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)|}{1+t^2} dt + \int_A^{+\infty} \frac{|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)|}{1+t^2} dt \right).$$

b) Sur $[0, A]$, la question 4 donne $|\arctan(t(x+h)) - \arctan(tx)| \leq t|h|$. Sur $[A, +\infty[$, les deux valeurs de $\arctan$ sont dans $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc leur différence est majorée par π en valeur absolue.

$$|\Phi(f)(x+h) - \Phi(f)(x)| \leq N_0(f) \left(|h| \int_0^A \frac{t}{1+t^2} dt + \pi \int_A^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \right).$$

c) On a $\int_0^A \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \ln(1+A^2)$ et $\int_A^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} - \arctan A = \arctan \frac{1}{A}$ (question 5). Avec $A = \frac{1}{|h|}$:

$$|\Phi(f)(x+h) - \Phi(f)(x)| \leq |h| \frac{N_0(f)}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{h^2} \right) + \pi N_0(f) \arctan |h|.$$

d) On a $|h| \ln \left(1 + \frac{1}{h^2} \right) = |h| \ln(1+h^2) - 2|h| \ln|h|$, qui tend vers 0 quand $h \rightarrow 0$ par croissances comparées. De plus, $\arctan|h| \rightarrow \arctan 0 = 0$ par continuité. Le majorant de c) tend donc vers 0 :

$$\Phi(f) \text{ est continue sur } \mathbb{R}.$$

e) Par 8 et d), $\Phi(f) \in E_0$. Φ est linéaire par linéarité des intégrales convergentes.

$$\Phi \text{ est un endomorphisme de } E_0.$$

Partie III – Étude d'un exemple**Partie III – La fonction $g = \Phi(1)$**

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} dt.$$

Corrigé – Partie III.

10. Imparité.

$\arctan$ est impaire, donc $\arctan(-tx) = -\arctan(tx)$, et par linéarité :

$$g(-x) = -g(x) : g \text{ est impaire.}$$

11. Dérivabilité de g sur $]0, +\infty[$.

a) $\arctan''(u) = -\frac{2u}{(1+u^2)^2}$. Or $2|u| \leq 1+u^2$, car $(|u|-1)^2 \geq 0$.

$$|\arctan''(u)| = \frac{2|u|}{1+u^2} \cdot \frac{1}{1+u^2} \leq \frac{1}{1+u^2}.$$

b) $\arctan$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment I . L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre a et b , avec a), donne :

$$\left| \arctan b - \arctan a - \frac{b-a}{1+a^2} \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \max_{u \in I} |\arctan''(u)|,$$

$$\left| \arctan b - \arctan a - \frac{b-a}{1+a^2} \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \max_{u \in I} \frac{1}{1+u^2}.$$

c) Si $t = 0$, les deux membres sont nuls. Sinon, on applique b) avec $a = tx$ et $b = t(x+h)$, de sorte que $b-a = th$. Comme $x+h > \frac{x}{2} > 0$, tout $u \in I$ vérifie $u \geq \min(tx, t(x+h)) \geq \frac{tx}{2} > 0$, donc $\frac{1}{1+u^2} \leq \frac{1}{1+\frac{t^2x^2}{4}}$.

$$\left| \arctan[t(x+h)] - \arctan(tx) - \frac{th}{1+t^2x^2} \right| \leq \frac{t^2h^2}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{t^2x^2}{4}}.$$

d) L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} dt$ converge, car l'intégrande est positif et équivalent à $\frac{1}{x^2t^3}$ en $+\infty$. De même, $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(4+t^2x^2)(1+t^2)} dt$ converge, car son intégrande est équivalent à $\frac{1}{x^2t^2}$. Par linéarité, on peut écrire $g(x+h) - g(x) - h \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}$ sous forme d'une seule intégrale. On multiplie c) par $\frac{1}{1+t^2}$, on intègre, et on utilise $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t^2x^2/4} = \frac{2}{4+t^2x^2}$:

$$\left| g(x+h) - g(x) - h \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} \right| \leq 2h^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(4+t^2x^2)(1+t^2)}.$$

e) On note $K(x)$ l'intégrale du majorant. Pour $0 < |h| < \frac{x}{2}$, on divise par $|h|$:

$$\left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} \right| \leq 2|h|K(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

$$g \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et } g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} dt.$$

f) Pour $x < 0$, on a $g(x) = -g(-x)$ avec $-x > 0$. Par composition, g est dérivable en x et $g'(x) = g'(-x)$.

$$g \text{ est dérivable sur }]-\infty, 0[\text{ et } g'(x) = g'(-x) = \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}.$$

12. Calcul de $g'(x)$ pour $x > 0$.

a) On calcule l'intégrale sur $[0, T]$ puis on fait tendre T vers $+\infty$:

$$g'(1) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2(1+t^2)} \right]_0^T = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{g'(1) = \frac{1}{2}.$$

b) On cherche A et B tels que $1 = A(1+t^2) + B(1+t^2x^2)$ pour tout t . Il suffit que $A + B = 1$ et $A + Bx^2 = 0$, soit, pour $x \neq 1$:

$$\boxed{A(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}, \quad B(x) = -\frac{1}{x^2 - 1}.$$

c) Pour $T > 0$, on intègre b) sur $[0, T]$:

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{t dt}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} &= \frac{A(x)}{2x^2} \ln(1+T^2x^2) + \frac{B(x)}{2} \ln(1+T^2) \\ &= \frac{1}{2(x^2-1)} \ln \left(\frac{1+T^2x^2}{1+T^2} \right). \end{aligned}$$

Quand $T \rightarrow +\infty$, $\frac{1+T^2x^2}{1+T^2} \rightarrow x^2$, et $\ln$ est continue en x^2 :

$$\boxed{\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[, \quad g'(x) = \frac{\ln(x^2)}{2(x^2-1)} = \frac{\ln x}{x^2-1}.$$

d) g' est continue sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. En 1, on a $\ln x \sim x-1$ et $x^2-1 \sim 2(x-1)$, donc $g'(x) \rightarrow \frac{1}{2} = g'(1)$.

$$\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

13. Nouvelle expression de g .

On note $k(t) = \frac{\ln t}{t^2-1}$ pour $t \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et $k(1) = \frac{1}{2}$. Par 12d), $k = g'$ est continue sur $]0, +\infty[$.

a) k est continue sur $]0, x]$. En 0, $k(t) \sim -\ln t$, de signe constant (positif) près de 0, et $\int_0^1 \ln t dt$ converge (une primitive est $t \ln t - t$, qui a une limite en 0). Par le critère d'équivalence pour les fonctions de signe constant :

$$\boxed{\int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1} dt \text{ converge pour tout } x > 0.}$$

b) $G : x \mapsto \int_0^x k(t) dt$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $k = g'$. Donc $g - G$ est constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Or $G(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$, par convergence de l'intégrale. De plus, $g(x) \rightarrow g(0) = 0$, car $g = \Phi(1)$ est continue (question 9d). La constante est donc nulle.

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1} dt.}$$

14. Limite de g en $+\infty$.

- a) Pour $t > 0$ et $x > 0$, la question 5 donne $\arctan(tx) = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{tx}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \arctan \left(\frac{1}{tx} \right) \frac{dt}{1+t^2}$ converge (intégrande continu sur $]0, +\infty[$ et compris entre 0 et $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+t^2}$). Par linéarité, et avec $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$:

$$g(x) = \frac{\pi^2}{4} - \int_0^{+\infty} \arctan \left(\frac{1}{tx} \right) \frac{dt}{1+t^2}.$$

- b) On découpe l'intégrale en $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (relation de Chasles) et on majore chaque morceau (l'intégrande est positif) :

- Sur $]0, \frac{1}{\sqrt{x}}]$, $\arctan \leq \frac{\pi}{2}$ et $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$, donc l'intégrale est au plus $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$.
- Sur $[\frac{1}{\sqrt{x}}, +\infty[$, $0 \leq \arctan u \leq u$ pour $u \geq 0$ (question 4 avec $y = 0$), donc $\arctan \frac{1}{tx} \leq \frac{1}{tx}$.

Pour comparer avec $\frac{\pi}{\sqrt{x}}$, on calcule, avec $\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}$:

$$\int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{t^2}{1+t^2} \right]_{1/\sqrt{x}}^T = \frac{1}{2} \ln(1+x).$$

Le second terme vaut donc $\frac{\ln(1+x)}{2x}$. Il reste à voir que $\frac{\ln(1+x)}{2x} < \frac{\pi}{2\sqrt{x}}$, c'est-à-dire $\ln(1+x) < \pi\sqrt{x}$. La fonction $\eta : x \mapsto 2\sqrt{x} - \ln(1+x)$ vérifie $\eta(0) = 0$ et, pour $x > 0$,

$$\eta'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} > 0,$$

car $1+x-\sqrt{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$. Donc $\ln(1+x) < 2\sqrt{x} < \pi\sqrt{x}$ pour $x > 0$.

$$\left| \int_0^{+\infty} \arctan \left(\frac{1}{tx} \right) \frac{dt}{1+t^2} \right| \leq \frac{\pi}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)} < \frac{\pi}{\sqrt{x}}.$$

- c) Par a) et b), $\left| g(x) - \frac{\pi^2}{4} \right| < \frac{\pi}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{\pi^2}{4}.$$

15. Calcul de $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$.

- a) On a $\frac{\ln t}{1-t^2} = -k(t)$. Par 13b), $\int_0^x \frac{\ln t}{1-t^2} dt = -g(x)$, qui tend vers $-\frac{\pi^2}{4}$ quand $x \rightarrow +\infty$ (question 14c). L'intégrale converge donc en $+\infty$ (elle converge en 0 par 13a).

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2} dt = -\frac{\pi^2}{4}.$$

- b) Sur $[1, +\infty[$, on fait le changement de variable $t = \frac{1}{u}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif de $]0, 1]$ sur $[1, +\infty[$ (intégrales de même nature) :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2} dt = \int_0^1 \frac{-\ln u}{1-\frac{1}{u^2}} \cdot \frac{du}{u^2} = \int_0^1 \frac{-\ln u}{u^2-1} du = \int_0^1 \frac{\ln u}{1-u^2} du.$$

Par Chasles :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1-t^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt.$$

c) Pour $t \in]0, 1[$, la somme géométrique donne $\frac{1}{1-t^2} = \sum_{k=0}^n t^{2k} + \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}$. Existence des intégrales :

- $t^{2k} \ln t$ est continue sur $]0, 1[$. Elle tend vers 0 en 0 si $k \geq 1$ (croissances comparées), et $\int_0^1 \ln t dt$ converge.
- $t \mapsto \frac{\ln t}{1-t^2} t^{2n+2}$ est continue sur $]0, 1[$, tend vers 0 en 0 et vers $-\frac{1}{2}$ en 1 : elle est prolongeable par continuité sur $[0, 1]$.

On multiplie l'identité par $\ln t$ et on intègre (linéarité des intégrales convergentes) :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt = \sum_{k=0}^n \int_0^1 t^{2k} \ln t dt + \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} t^{2n+2} dt.$$

d) Pour $\varepsilon \in]0, 1[$, les fonctions $t \mapsto \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$ et $\ln$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon, 1]$. On intègre par parties :

$$\int_{\varepsilon}^1 t^{2n} \ln t dt = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \ln t \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{t^{2n}}{2n+1} dt = -\frac{\varepsilon^{2n+1} \ln \varepsilon}{2n+1} - \frac{1 - \varepsilon^{2n+1}}{(2n+1)^2}.$$

On fait tendre $\varepsilon \rightarrow 0^+$ (croissances comparées) :

$$\int_0^1 t^{2n} \ln t dt = -\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

e) Pour $t \in]0, 1[$, on a $\ln \frac{1}{t} \leq \frac{1}{t} - 1$ (car $\ln y \leq y - 1$), donc $0 \leq -\ln t \leq \frac{1-t}{t}$, puis

$$\left| \frac{\ln t}{1-t^2} \right| \leq \frac{1-t}{t(1-t)(1+t)} \leq \frac{1}{t}.$$

L'intégrande est donc majoré par t^{2n+1} en valeur absolue, d'où $\left| \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} t^{2n+2} dt \right| \leq \frac{1}{2n+2}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} t^{2n+2} dt = 0.$$

f) Par a) et b), $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} dt = -\frac{\pi^2}{8}$. Par c) et d),

$$-\frac{\pi^2}{8} = -\sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2} + \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2} t^{2n+2} dt,$$

et le dernier terme tend vers 0 par e). Donc la série converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge ; notons S sa somme. On sépare les termes d'indices pairs et impairs (séries convergentes à termes positifs) : $S = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{4p^2} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{S}{4} + \frac{\pi^2}{8}$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Partie IV – Retour à l'étude de Φ

Partie IV – Inversion de $\text{id}_{E_0} - \lambda\Phi$

$$|\lambda| < \frac{4}{\pi^2}, \gamma = \frac{\pi^2}{4}|\lambda| < 1, \varphi_n = \lambda^n \Phi^n(f), M = N_0(f) > 0.$$

Corrigé – Partie IV.

16. Norme de Φ .

Par 8, le quotient est majoré par $\frac{\pi^2}{4}$ pour tout $f \in E_0 \setminus \{0\}$. Pour $f = 1$, on a $N_0(f) = 1$ et $\Phi(f) = g$. Par 12c) et 12a), $g' > 0$ sur $]0, +\infty[$ ($\ln x$ et $x^2 - 1$ ont le même signe), donc g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, avec $g(0) = 0$ et $g \rightarrow \frac{\pi^2}{4}$ en $+\infty$ (14c). Par imparité, $N_0(g) = \sup_{\mathbb{R}} |g| = \frac{\pi^2}{4}$.

$$\sup_{f \in E_0 \setminus \{0\}} \frac{N_0[\Phi(f)]}{N_0(f)} = \frac{\pi^2}{4}.$$

17. Récurrence.

Par linéarité de Φ , $\varphi_{n+1} = \lambda^{n+1} \Phi(\Phi^n(f)) = \lambda \Phi(\lambda^n \Phi^n(f)) = \lambda \Phi(\varphi_n)$. Par 8, $N_0(\varphi_{n+1}) = |\lambda| N_0[\Phi(\varphi_n)] \leq |\lambda| \frac{\pi^2}{4} N_0(\varphi_n)$.

$$\varphi_{n+1} = \lambda \Phi(\varphi_n), \quad N_0(\varphi_{n+1}) \leq \gamma N_0(\varphi_n).$$

18. Injectivité.

Si $\lambda \Phi(f) = f$ avec $f \neq 0$, alors $M = N_0(\lambda \Phi(f)) \leq \gamma M < M$, puisque $\gamma < 1$ et $M > 0$. C'est absurde. Ainsi $\ker(\text{id}_{E_0} - \lambda \Phi) = \{0\}$.

$$\lambda \Phi(f) = f \text{ est impossible pour } f \neq 0 ; \text{id}_{E_0} - \lambda \Phi \text{ est injectif.}$$

19. Majoration géométrique.

Par récurrence à l'aide de 17 (et $N_0(\varphi_0) = M$), on obtient $N_0(\varphi_n) \leq \gamma^n M$. Comme $0 \leq \gamma < 1$, la série géométrique $\sum \gamma^n$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs :

$$N_0(\varphi_n) \leq \gamma^n M \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} N_0(\varphi_n) \text{ converge.}$$

20. Convergence simple.

On a $|\varphi_n(x)| \leq N_0(\varphi_n)$. La série $\sum \varphi_n(x)$ est donc absolument convergente, par comparaison avec 19.

$$\sum_{n \geq 0} \varphi_n(x) \text{ converge pour tout réel } x.$$

21. Caractère borné.

Pour tout x , par l'inégalité triangulaire, $|\varphi(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} N_0(\varphi_n) \leq \frac{M}{1-\gamma}$.

$$\varphi \text{ est bornée sur } \mathbb{R}.$$

22. Continuité de φ .

a) Par 17, $\varphi_{n+1} = \lambda\Phi(\varphi_n)$ avec $\varphi_n \in E_0$ (9e). On applique 9c) à φ_n :

$$|\varphi_{n+1}(x+h) - \varphi_{n+1}(x)| \leq |\lambda| N_0(\varphi_n) \left[\frac{|h|}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{h^2} \right) + \pi \arctan |h| \right].$$

b) Les séries convergent, donc $\varphi(x+h) - \varphi(x) = f(x+h) - f(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} (\varphi_{n+1}(x+h) - \varphi_{n+1}(x))$. On applique l'inégalité triangulaire (passage à la limite dans les sommes partielles) et a) :

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| \leq |\lambda| \left(\sum_{n=0}^{+\infty} N_0(\varphi_n) \right) \left[\frac{|h|}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{h^2} \right) + \pi \arctan |h| \right] + |f(x+h) - f(x)|.$$

c) Quand $h \rightarrow 0$, le crochet tend vers 0 (comme en 9d), et $f(x+h) \rightarrow f(x)$ car f est continue. Avec 21, on obtient :

$$\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}, \text{ et } \varphi \in E_0.}$$

23. Valeurs spectrales.

a) On note $S_n = \sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k$. Par 17, la somme est télescopique :

$$(\text{id}_{E_0} - \lambda\Phi)(S_n) = \sum_{k=0}^{n+1} \varphi_k - \sum_{k=0}^{n+1} \varphi_{k+1} = \varphi_0 - \varphi_{n+2} = f - \varphi_{n+2}.$$

Par 19, $N_0(\varphi_{n+2}) \leq \gamma^{n+2} M \rightarrow 0$.

$$\boxed{(\text{id}_{E_0} - \lambda\Phi)(S_n) = f - \varphi_{n+2} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} N_0[(\text{id}_{E_0} - \lambda\Phi)(S_n) - f] = 0.}$$

b) Pour $\psi \in E_0$, par 8 et l'inégalité triangulaire, $N_0[(\text{id}_{E_0} - \lambda\Phi)(\psi)] \leq (1 + \gamma)N_0(\psi)$. Par linéarité,

$$N_0[(\text{id}_{E_0} - \lambda\Phi)(\varphi) - f] \leq (1 + \gamma)N_0(\varphi - S_n) + N_0[(\text{id}_{E_0} - \lambda\Phi)(S_n) - f].$$

Or $N_0(\varphi - S_n) \leq \sum_{k \geq n+2} N_0(\varphi_k)$, reste d'une série convergente, qui tend vers 0. Le membre de gauche, indépendant de n , est donc nul. Ainsi tout $f \in E_0 \setminus \{0\}$ a un antécédent, et 0 aussi. Avec 18 :

$$\boxed{(\text{id}_{E_0} - \lambda\Phi)(\varphi) = f ; \text{id}_{E_0} - \lambda\Phi \text{ est un automorphisme de } E_0.}$$

c) Par contraposée, supposons $|\mu| > \frac{\pi^2}{4}$ et posons $\lambda = \frac{1}{\mu}$, de sorte que $|\lambda| < \frac{4}{\pi^2}$. Alors $\Phi - \mu \text{id}_{E_0} = -\mu(\text{id}_{E_0} - \lambda\Phi)$ est bijective par b), puisque $\mu \neq 0$.

$$\boxed{\Phi - \mu \text{id}_{E_0} \text{ non bijective} \implies |\mu| \leq \frac{\pi^2}{4}.}$$