

HEC Paris – ESCP Europe

Mathématiques approfondies – Mathématiques II

Corrigé du sujet adapté – 2013

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté. On note $q = 1 - p$.

Partie I – Polynômes factoriels ascendants et lois binomiales négatives

Partie I – Factorielles ascendantes et loi $BN(r, p)$

Questions 1 à 6.

Corrigé – Partie I.

1. Changement de base.

a) $X^{\langle 2 \rangle} = X^2 + X$ et $X^{\langle 3 \rangle} = X^3 + 3X^2 + 2X$. Donc :

$$X^2 = X^{\langle 2 \rangle} - X^{\langle 1 \rangle}, \quad X^3 = X^{\langle 3 \rangle} - 3X^{\langle 2 \rangle} + X^{\langle 1 \rangle}.$$

b) $X^{\langle 4 \rangle} = X^4 + 6X^3 + 11X^2 + 6X$, donc

$$X^4 = X^{\langle 4 \rangle} - 6(X^{\langle 3 \rangle} - 3X^{\langle 2 \rangle} + X^{\langle 1 \rangle}) - 11(X^{\langle 2 \rangle} - X^{\langle 1 \rangle}) - 6X^{\langle 1 \rangle}.$$

$$X^4 = X^{\langle 4 \rangle} - 6X^{\langle 3 \rangle} + 7X^{\langle 2 \rangle} - X^{\langle 1 \rangle}.$$

c) $X^{\langle k \rangle}$ est unitaire de degré k . La famille $(X^{\langle 0 \rangle}, \dots, X^{\langle n \rangle})$ est donc échelonnée en degré : elle est libre et compte $n + 1$ éléments, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$X^n \in \text{Vect}(X^{\langle 0 \rangle}, \dots, X^{\langle n \rangle}).$$

2. Formule du binôme ascendante.

a)

$$r^{\langle n+1 \rangle} = (r + n) r^{\langle n \rangle}.$$

b) Par a), $r^{\langle k+1 \rangle} s^{\langle n-k \rangle} + r^{\langle k \rangle} s^{\langle n-k+1 \rangle} = r^{\langle k \rangle} s^{\langle n-k \rangle} ((r + k) + (s + n - k))$.

$$(r + s + n) r^{\langle k \rangle} s^{\langle n-k \rangle} = r^{\langle k+1 \rangle} s^{\langle n-k \rangle} + r^{\langle k \rangle} s^{\langle n-k+1 \rangle}.$$

c) Récurrence. Le cas $n = 0$ est clair. Si la formule est vraie au rang n , alors par a) et b) :

$$(r + s)^{\langle n+1 \rangle} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (r^{\langle k+1 \rangle} s^{\langle n-k \rangle} + r^{\langle k \rangle} s^{\langle n-k+1 \rangle}).$$

Après le décalage d'indice $k \rightarrow k - 1$ dans la première somme, la formule de Pascal $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ donne :

$$(r+s)^{\langle n \rangle} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^{\langle k \rangle} s^{\langle n-k \rangle}.$$

3. Une série de type binomial.

a)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(r+n+1)x}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x.$$

b) Comme $x < \frac{1+x}{2}$, il existe N tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1+x}{2}$ pour $n \geq N$ (les u_n sont > 0). Par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{N+n} \leq u_N \left(\frac{1+x}{2} \right)^n.$$

c) Comme $0 < \frac{1+x}{2} < 1$, par encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

d) Formule de Taylor avec reste intégral : si φ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0, x]$, alors

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t) dt.$$

Pour $\varphi(t) = (1-t)^{-r}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty, 1[$, on a par récurrence $\varphi^{(k)}(t) = r^{\langle k \rangle} (1-t)^{-r-k}$. Le reste vaut $\frac{r^{\langle n+1 \rangle}}{n!} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^n} \frac{dt}{(1-t)^{r+1}} = R_n$.

$$(1-x)^{-r} = \sum_{k=0}^n \frac{r^{\langle k \rangle}}{k!} x^k + R_n.$$

e) Pour $t \in [0, x] : x-t \geq 0$ et $1-t > 0$, et $x-t \leq x(1-t) \iff t(1-x) \geq 0$. Donc

$$0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x.$$

Par ailleurs, $(1-t)^{-r-1} \leq (1-x)^{-r-1}$ sur $[0, x]$. Donc $0 \leq R_n \leq \frac{r^{\langle n+1 \rangle}}{n!} x^n \cdot x(1-x)^{-r-1}$.

$$0 \leq R_n \leq u_n.$$

f) Par c) et e), $R_n \rightarrow 0$; par d), les sommes partielles convergent vers $(1-x)^{-r}$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r^{\langle n \rangle}}{n!} x^n = \frac{1}{(1-x)^r}.$$

4. Normalisation.

Avec $x = 1-p \in]0, 1[$ dans 3.f) :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^{\langle k \rangle}}{k!} p^r (1-p)^k = p^r p^{-r} = 1.$$

5. Moments factoriels.

- a) $X_n = 0$ si $X < n$, et $X_n = \frac{X!}{(X-n)!}$ sinon. De plus $r^{(k)} = r^{(n)}(r+n)^{(k-n)}$ pour $k \geq n$.
Les termes de la série sont positifs, et par 3.f) appliquée à $r+n$:

$$\sum_{k \geq n} \frac{k!}{(k-n)!} \frac{r^{(k)}}{k!} p^r q^k = p^r r^{(n)} q^n \sum_{j \geq 0} \frac{(r+n)^{(j)}}{j!} q^j = p^r r^{(n)} q^n p^{-r-n}.$$

$$\mathbb{E}(X_n) = r^{(n)} \left(\frac{1-p}{p} \right)^n.$$

- b) Comme en 1.c), X^n est combinaison linéaire de $X_1, \dots, X_n$ (polynômes de degrés échelonnés). Par linéarité, X admet des moments de tous ordres. $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1)$, et $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X)$, d'où

$$\mathbb{V}(X) = r(r+1) \frac{q^2}{p^2} + r \frac{q}{p} - r^2 \frac{q^2}{p^2} = \frac{rq(q+p)}{p^2}.$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r(1-p)}{p}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

6. Stabilité.

Par indépendance, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(Z = n) = \sum_{k=0}^n \frac{r^{(k)}}{k!} \frac{s^{(n-k)}}{(n-k)!} p^{r+s} q^n = \frac{p^{r+s} q^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^{(k)} s^{(n-k)}.$$

Par 2.c), la somme vaut $(r+s)^{(n)}$.

$$Z \hookrightarrow BN(r+s, p).$$

Partie II – Inégalités stochastiques**Partie II – Ordre stochastique et intervalle de confiance**

Questions 7 à 13. On note « $X \preceq Y$ » pour « X est stochastiquement inférieure à Y ».

Corrigé – Partie II.**7. Inégalité ponctuelle.**

$[X \geq x] \subset [Y \geq x]$, d'où par croissance de $\mathbb{P}$:

$$X \preceq Y.$$

8. Un exemple gaussien.

- a) $X+1$ et $Y-1$ suivent $\mathcal{N}(0, 1)$. Par indépendance, $\mathbb{P}([X \geq 0] \cap [Y < 0]) = \mathbb{P}(X+1 \geq$

$$1) \mathbb{P}(Y - 1 < -1).$$

$$\mathbb{P}([X \geq 0] \cap [Y < 0]) = (1 - \Phi(1))\Phi(-1) = (1 - \Phi(1))^2.$$

b) $\mathbb{P}(X \geq x) = 1 - \Phi(x + 1) \leq 1 - \Phi(x - 1) = \mathbb{P}(Y \geq x)$, car Φ est croissante.

$$X \preceq Y.$$

c) Non : $\mathbb{P}(X > Y) \geq \mathbb{P}([X \geq 0] \cap [Y < 0]) = (1 - \Phi(1))^2 > 0$.

$$\text{Il existe } \omega \text{ tel que } X(\omega) > Y(\omega).$$

9. Cas entier.

Si $X \preceq Y$, alors pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X \geq k + 1) \leq \mathbb{P}(Y \geq k + 1)$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X \leq k) \geq \mathbb{P}(Y \leq k)$. Réciproquement, pour $x \leq 0$ les deux probabilités valent 1. Pour $x > 0$, avec $k = \lceil x \rceil - 1 \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X \geq x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq k) \leq 1 - \mathbb{P}(Y \leq k) = \mathbb{P}(Y \geq x).$$

$$X \preceq Y \iff \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X \leq k) \geq \mathbb{P}(Y \leq k).$$

10. Loïs de Poisson.

a) Stabilité des lois de Poisson : la somme de deux variables indépendantes de lois $\mathcal{P}(\theta)$ et $\mathcal{P}(\lambda - \theta)$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

$$X + Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda).$$

b) $Z \geq 0$ presque sûrement, donc $[X \geq x] \subset [X + Z \geq x]$ à un événement négligeable près. Par 7, $\mathbb{P}(X \geq x) \leq \mathbb{P}(X + Z \geq x) = \mathbb{P}(Y \geq x)$, puisque $X + Z$ et Y ont même loi.

$$X \preceq Y.$$

11. La fonction F .

a) On met à jour le terme général $\frac{t^j}{j!}e^{-t}$ par multiplication par $\frac{t}{j+1}$:

```
def suite(k, t):
    terme = np.exp(-t)
    s = 0
    for j in range(k + 1):
        s = s + terme
        terme = terme * t / (j + 1)
    return s
```

b) $t \mapsto F(t, k)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, par télescopage,

$$\partial_t F(t, k) = \sum_{j=1}^k \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{-t} - \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} e^{-t} = -\frac{t^k}{k!} e^{-t} < 0.$$

Elle est continue et strictement décroissante, de limite 1 en 0^+ et 0 en $+\infty$. Par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$.

$$\forall \beta \in]0, 1[, \exists ! M(\beta, k) > 0, F(M(\beta, k), k) = \beta.$$

12. Les variables $V = G(X - 1)$ et $W = G(X)$.

- a) $G(k) \rightarrow 1 > \alpha$ quand $k \rightarrow +\infty$, donc $\{k, G(k) \geq \alpha\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$: elle admet un minimum. Par minimalité, et en posant $G(-1) = 0$:

$$G(L_\alpha - 1) < \alpha \leq G(L_\alpha).$$

- b) G est croissante, donc $G(k) \geq \alpha \iff k \geq L_\alpha$. D'où $[W < \alpha] = [X \leq L_\alpha - 1]$ et $[V \geq \alpha] = [X \geq L_\alpha + 1]$: ce sont des événements. Plus généralement, V et W sont des fonctions de la variable discrète X : elles prennent un nombre au plus dénombrable de valeurs, et $[W = w] = \bigcup_{k, G(k)=w} [X = k]$ est un événement.

$$V \text{ et } W \text{ sont des variables aléatoires discrètes.}$$

- c)

$$\mathbb{P}([W < \alpha]) = G(L_\alpha - 1), \quad \mathbb{P}([V \geq \alpha]) = 1 - G(L_\alpha).$$

- d) Pour $x \in]0, 1[$, $\mathbb{P}(U \geq x) = 1 - x$.

- $\mathbb{P}(V \geq x) = 1 - G(L_x) \leq 1 - x$ et $\mathbb{P}(W \geq x) = 1 - G(L_x - 1) > 1 - x$.
- Pour $x \leq 0$, toutes les probabilités valent 1.
- Pour $x > 1$, elles sont nulles.
- Pour $x = 1$, $\mathbb{P}(U \geq 1) = 0$. De plus $[V \geq 1] = [G(X - 1) = 1] \subset \bigcup_{k \in K} [X = k]$, où $K = \{k, \mathbb{P}(X \geq k) = 0\}$; donc $\mathbb{P}(V \geq 1) = 0$.

$$V \preceq U \preceq W.$$

13. Intervalle de confiance pour le paramètre d'une loi de Poisson.

- a) $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \theta$.

$$\bar{X}_n = \frac{S_n}{n} \text{ est un estimateur sans biais de } \theta.$$

- b) $S_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\theta)$ (stabilité), de fonction de répartition $G(k) = F(n\theta, k)$. On applique 12 à $X = S_n$: $W = F(n\theta, S_n)$ et $V = F(n\theta, S_n - 1)$. Par 12.c) et 12.a) :

- $\mathbb{P}(W < \frac{\alpha}{2}) = G(L_{\alpha/2} - 1) < \frac{\alpha}{2}$;
- avec $\beta = 1 - \frac{\alpha}{2}$, $\mathbb{P}(V \geq \beta) = 1 - G(L_\beta) \leq 1 - \beta = \frac{\alpha}{2}$.

$$\mathbb{P}([F(n\theta, S_n) < \frac{\alpha}{2}]) \leq \frac{\alpha}{2}, \quad \mathbb{P}([F(n\theta, S_n - 1) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}]) \leq \frac{\alpha}{2}.$$

- c) $t \mapsto F(t, k)$ est strictement décroissante (11.b).

- $[\theta > J] = [n\theta > M(\frac{\alpha}{2}, S_n)] = [F(n\theta, S_n) < \frac{\alpha}{2}]$.
- Sur $[S_n \geq 1]$, $[\theta < I] = [F(n\theta, S_n - 1) > 1 - \frac{\alpha}{2}]$; sur $[S_n = 0]$, $I = 0 < \theta$.

Par b), $\mathbb{P}(\theta > J) \leq \frac{\alpha}{2}$ et $\mathbb{P}(\theta < I) \leq \frac{\alpha}{2}$, d'où :

$$\mathbb{P}(I(X_1, \dots, X_n) \leq \theta \leq J(X_1, \dots, X_n)) \geq 1 - \alpha.$$

$[I, J]$ est un intervalle de confiance de θ au risque au plus α .

Partie III – Lois de Poisson mélangées

Partie III – Mélanges de lois de Poisson

Questions 14 à 17.

Corrigé – Partie III.

14. Convergence.

$t \mapsto t^n e^{-t}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ (par $n^n e^{-n}$), donc $0 \leq t^n e^{-t} f(t) \leq n^n e^{-n} f(t)$, et $\int_0^{+\infty} f$ converge. Par comparaison :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} f(t) dt \text{ converge.}$$

15. $\mathcal{P}_f$ est une loi de probabilité.

a) Par linéarité, $v_n = \int_0^{+\infty} F(t, n) f(t) dt$, et comme $\int f = 1$, $1 - v_n = \int_0^{+\infty} (1 - F(t, n)) f(t) dt \geq 0$. Or $t \mapsto 1 - F(t, n)$ est croissante (11.b) et à valeurs dans $[0, 1]$. Donc

$$\int_0^A (1 - F(t, n)) f \leq (1 - F(A, n)) \int_0^A f \leq \mathbb{P}(X_A > n),$$

$$\int_A^{+\infty} (1 - F(t, n)) f \leq \int_A^{+\infty} f.$$

$$0 \leq 1 - v_n \leq \mathbb{P}([X_A > n]) + \int_A^{+\infty} f(t) dt.$$

b) Soit $\varepsilon > 0$. On choisit A tel que $\int_A^{+\infty} f \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (reste d'une intégrale convergente), puis n_0 tel que $\mathbb{P}(X_A > n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $n \geq n_0$. Alors $0 \leq 1 - v_n \leq \varepsilon$ pour $n \geq n_0$.

$$\sum_{n \geq 0} z_n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} z_n = 1.$$

16. Le cas Gamma.

a) Avec $b = \frac{p}{1-p}$, $f = g_{r,b} : bT \mapsto \gamma(r)$, d'espérance et de variance r .

$$T \mapsto \text{Gamma}\left(r, \frac{p}{1-p}\right), \quad \mathbb{E}(T) = \frac{r(1-p)}{p}, \quad \mathbb{V}(T) = \frac{r(1-p)^2}{p^2}.$$

b) Avec le changement de variable $u = (1+b)t$ et $\Gamma(n+r) = r^{(n)} \Gamma(r)$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} e^{-t} f(t) dt = \frac{b^r}{n! \Gamma(r)} \int_0^{+\infty} t^{n+r-1} e^{-(1+b)t} dt = \frac{b^r \Gamma(n+r)}{n! \Gamma(r) (1+b)^{n+r}}.$$

Or $1+b = \frac{1}{1-p}$, donc $\frac{b^r}{(1+b)^{n+r}} = p^r (1-p)^n$.

$$\mathcal{P}_f = BN(r, p).$$

17. Comparaisons.

- a) Soient $Y_1 \hookrightarrow BN(r, p)$ et $Y_2 \hookrightarrow BN(s - r, p)$ indépendantes. Par 6, $Y_1 + Y_2 \hookrightarrow BN(s, p)$, et $Y_1 \leq Y_1 + Y_2$. Par 7, puisque l'ordre stochastique ne dépend que des lois :

$$\boxed{\mathbb{P}(Y \geq x) = \mathbb{P}(Y_1 \geq x) \leq \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 \geq x) = \mathbb{P}(Z \geq x) : Y \preceq Z.}$$

- b) Soit $k \geq 1$ et $g(t) = 1 - F(t, k - 1)$, croissante (11.b). Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}_f$, par 15, $\mathbb{P}(X \geq k) = 1 - \sum_{n < k} z_n = \int_0^{+\infty} g(t) f(t) dt$.

Par 16, $Z \hookrightarrow \mathcal{P}_{f_Z}$ et $W \hookrightarrow \mathcal{P}_{f_W}$, avec $f_Z = g_{s, b_p}$ et $f_W = g_{s, b_q}$, où $b_p = \frac{p}{1-p} > b_q = \frac{q}{1-q}$. On a $f_W(t) = \frac{1}{c} f_Z\left(\frac{t}{c}\right)$ avec $c = \frac{b_p}{b_q} > 1$. Par le changement de variable $t = cu$ et la croissance de g :

$$\mathbb{P}(W \geq k) = \int_0^{+\infty} g(cu) f_Z(u) du \geq \int_0^{+\infty} g(u) f_Z(u) du = \mathbb{P}(Z \geq k).$$

Par 9, $Z \preceq W$, et par transitivité avec a) :

$$\boxed{Y \preceq W.}$$