

HEC Paris – ESCP Europe

Mathématiques II

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2013

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1	Polynômes factoriels ascendants et lois binomiales négatives	2
	<i>Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; séries ; probabilités discrètes.</i>	2
2	Inégalités stochastiques	3
	<i>Thèmes abordés : probabilités discrètes ; variables à densité ; estimations ; Python. . . .</i>	3
3	Lois de Poisson mélangées	5
	<i>Thèmes abordés : intégrales généralisées ; probabilités discrètes ; variables à densité. . .</i>	5

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et sont à valeurs réelles.

L'objectif du problème est d'introduire une famille de lois de probabilité discrètes, dites *lois de Poisson mélangées*, qui permettent de modéliser le nombre d'apparitions d'événements aléatoires provenant de sources hétérogènes.

1 Polynômes factoriels ascendants et lois binomiales négatives

Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; séries ; probabilités discrètes.

Pour tout réel x et tout entier naturel n , on pose

$$x^{\langle n \rangle} = \begin{cases} \prod_{k=1}^n (x + k - 1) & \text{si } n \geq 1, \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

On associe aux fonctions polynomiales $x \mapsto x^{\langle n \rangle}$ les polynômes $X^{\langle n \rangle}$ ($n \in \mathbb{N}$) de $\mathbb{R}[X]$, dits polynômes factoriels ascendants.

1. a) Vérifier les égalités $X^2 = X^{\langle 2 \rangle} - X^{\langle 1 \rangle}$ et $X^3 = X^{\langle 3 \rangle} - 3X^{\langle 2 \rangle} + X^{\langle 1 \rangle}$.
 b) Exprimer X^4 comme combinaison linéaire des polynômes $X^{\langle 4 \rangle}$, $X^{\langle 3 \rangle}$, $X^{\langle 2 \rangle}$ et $X^{\langle 1 \rangle}$.
 c) Justifier plus généralement que les polynômes X^n ($n \in \mathbb{N}$) de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ sont tous des combinaisons linéaires de polynômes factoriels ascendants.
2. Soit (r, s) un couple de réels et n un entier naturel.
 - a) Exprimer $r^{\langle n+1 \rangle}$ en fonction de $r^{\langle n \rangle}$.
 - b) En déduire, pour tout $k \in [0, n]$, la relation

$$(r + s + n)r^{\langle k \rangle}s^{\langle n-k \rangle} = r^{\langle k+1 \rangle}s^{\langle n-k \rangle} + r^{\langle k \rangle}s^{\langle n-k+1 \rangle}.$$

- c) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(r + s)^{\langle n \rangle} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^{\langle k \rangle} s^{\langle n-k \rangle}.$$

3. Dans cette question, r est un réel strictement positif et x est un réel fixé de $]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \frac{r^{\langle n+1 \rangle} x^{n+1}}{n!(1-x)^{n+1}} \quad \text{et} \quad R_n = \frac{r^{\langle n+1 \rangle}}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t} \right)^n \frac{1}{(1-t)^{r+1}} dt.$$

- a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.
- b) En déduire l'existence d'un entier naturel N tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$u_{N+n} \leq u_N \left(\frac{1+x}{2} \right)^n.$$

- c) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

- d) À l'aide d'une formule de Taylor que l'on citera avec ses hypothèses, justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité

$$(1-x)^{-r} = \sum_{k=0}^n \frac{r^{(k)}}{k!} x^k + R_n.$$

- e) Montrer que, pour tout $t \in [0, x]$, $0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x$. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité $R_n \leq u_n$.

- f) Dédire des résultats précédents que la série de terme général $\frac{r^{(n)}}{n!} x^n$ est convergente et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r^{(n)}}{n!} x^n = \frac{1}{(1-x)^r}.$$

4. Vérifier que, pour tout couple (r, p) de réels tels que $r > 0$ et $0 < p < 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^{(k)}}{k!} p^r (1-p)^k = 1.$$

Dans toute la suite du problème, on dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ suit la *loi binomiale négative* de paramètres r ($r > 0$) et p ($0 < p < 1$) si, pour tout entier naturel k ,

$$\mathbb{P}([X = k]) = \frac{r^{(k)}}{k!} p^r (1-p)^k.$$

Cette loi est notée $BN(r, p)$.

5. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $BN(r, p)$.

- a) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que la variable aléatoire X_n , définie par

$$X_n = \prod_{k=1}^n (X - k + 1), \text{ admet une espérance égale à}$$

$$r^{(n)} \left(\frac{1-p}{p} \right)^n.$$

- b) En déduire que X admet des moments de tous ordres. Calculer l'espérance et la variance de X .

6. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois $BN(r, p)$ et $BN(s, p)$, respectivement. On pose $Z = X + Y$. Montrer que Z suit la loi $BN(r + s, p)$.

2 Inégalités stochastiques

Thèmes abordés : probabilités discrètes ; variables à densité ; estimations ; Python.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que X est *stochastiquement inférieure* à Y lorsque, pour tout réel x , on a $\mathbb{P}([X \geq x]) \leq \mathbb{P}([Y \geq x])$.

7. Montrer que si les deux variables aléatoires X et Y vérifient, pour tout $\omega \in \Omega$, l'inégalité $X(\omega) \leq Y(\omega)$, alors X est stochastiquement inférieure à Y .

8. On suppose que X suit la loi normale d'espérance égale à -1 et de variance égale à 1 , que Y suit la loi normale d'espérance égale à 1 et de variance égale à 1 , et que X et Y sont indépendantes.
- Exprimer $\mathbb{P}([X \geq 0] \cap [Y < 0])$ à l'aide de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite.
 - Montrer que X est stochastiquement inférieure à Y .
 - A-t-on, pour tout $\omega \in \Omega$, l'inégalité $X(\omega) \leq Y(\omega)$?
9. On suppose que X et Y sont discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que X est stochastiquement inférieure à Y si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}([X \leq k]) \geq \mathbb{P}([Y \leq k])$.
10. Soit θ et λ deux réels vérifiant $0 < \theta < \lambda$, et soit X et Z deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement la loi de Poisson de paramètre θ et la loi de Poisson de paramètre $\lambda - \theta$.
- Rappeler la loi de $X + Z$ en citant précisément le résultat de cours utilisé.
 - Soit Y une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ . Montrer que X est stochastiquement inférieure à Y .
11. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $t > 0$, on pose

$$F(t, k) = \sum_{j=0}^k \frac{t^j}{j!} e^{-t}.$$

- Écrire en Python une fonction `suite(k, t)` qui permet de calculer $F(t, k)$.
- Établir, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $\beta \in]0, 1[$, l'existence d'un unique réel strictement positif $M(\beta, k)$ vérifiant l'égalité $F(M(\beta, k), k) = \beta$.

```
import math

def suite(k, t):
    return math.exp(-t) * sum(t**j / math.factorial(j)
                               for j in range(k + 1))
```

12. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction de répartition G . On note V et W les deux applications de Ω dans $[0, 1]$, définies par : pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\begin{cases} V(\omega) = G(X(\omega) - 1), \\ W(\omega) = G(X(\omega)). \end{cases}$$

Soit α un réel vérifiant $0 < \alpha < 1$.

- Justifier l'existence de $L_\alpha = \min\{k \in \mathbb{N}; G(k) \geq \alpha\}$ et comparer les réels α , $G(L_\alpha - 1)$ et $G(L_\alpha)$.
- Montrer que $[W < \alpha]$ et $[V \geq \alpha]$ sont des événements. Qu'en déduit-on pour les applications V et W ?
- Exprimer $\mathbb{P}([W < \alpha])$ et $\mathbb{P}([V \geq \alpha])$ à l'aide de G et L_α .
- Soit U une variable aléatoire à densité qui suit la loi uniforme sur le segment $[0, 1]$. Montrer que V est stochastiquement inférieure à U et que U est stochastiquement inférieure à W .

13. Pour n entier supérieur ou égal à 2, soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un n -échantillon i.i.d. de la loi de Poisson de paramètre inconnu $\theta > 0$. On pose, pour tout $n \geq 2$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Les notations F et M sont celles de la question 11.

- a) Proposer un estimateur sans biais de θ .
- b) Soit α un réel tel que $0 < \alpha < 1$. À l'aide de la question 12, établir les deux inégalités suivantes :

$$\mathbb{P}\left(\left[F(n\theta, S_n) < \frac{\alpha}{2}\right]\right) \leq \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\left[F(n\theta, S_n - 1) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}\right]\right) \leq \frac{\alpha}{2}.$$

c) On pose

$$J(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} M\left(\frac{\alpha}{2}, S_n\right)$$

et

$$I(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} \frac{1}{n} M\left(1 - \frac{\alpha}{2}, S_n - 1\right) & \text{si } S_n \geq 1, \\ 0 & \text{si } S_n = 0. \end{cases}$$

Déduire des questions précédentes que $I(X_1, \dots, X_n)$ et $J(X_1, \dots, X_n)$ sont les bornes d'un intervalle de confiance de risque inférieur ou égal à α pour le paramètre inconnu θ .

3 Lois de Poisson mélangées

Thèmes abordés : intégrales généralisées ; probabilités discrètes ; variables à densité.

Dans cette partie, T est une variable aléatoire à densité dont une densité f est nulle sur $\mathbb{R}_-$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $a > 0$ et $b > 0$, on dira qu'une variable aléatoire suit la loi Gamma à deux paramètres (a, b) lorsqu'elle admet la densité

$$g_{a,b}(t) = \begin{cases} \frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Si X suit la loi gamma de paramètre de forme a , notée $\gamma(a)$, alors X/b suit la loi Gamma (a, b) .

14. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} f(t) dt.$$

15. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} e^{-t} f(t) dt \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=0}^n z_k.$$

- a) Soit A un réel strictement positif et X_A une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre A . Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement suivant :

$$0 \leq 1 - v_n \leq \mathbb{P}([X_A > n]) + \int_A^{+\infty} f(t) dt.$$

- b) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} z_n$ est convergente et que $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = 1$.

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ suit la *loi de Poisson mélangée associée à la densité f* , notée $\mathcal{P}_f$, si, pour tout entier naturel n , on a

$$\mathbb{P}([X = n]) = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} e^{-t} f(t) dt.$$

16. La notation $\exp$ désigne la fonction exponentielle. Soit r un réel strictement positif et p un réel vérifiant $0 < p < 1$. On suppose dans cette question qu'une densité f de T est donnée par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(r)} \left(\frac{p}{1-p} \right)^r t^{r-1} \exp\left(-\frac{pt}{1-p}\right) & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

- a) Reconnaître la loi de T . Donner, sans démonstration, l'espérance et la variance de T .
- b) Montrer que $\mathcal{P}_f$ est la loi binomiale négative $BN(r, p)$.
17. Soit (r, p) et (s, q) deux couples de réels vérifiant $0 < r < s$ et $0 < q < p < 1$. On note Y , Z et W trois variables aléatoires qui suivent les lois $BN(r, p)$, $BN(s, p)$ et $BN(s, q)$, respectivement.
- a) Montrer que Y est stochastiquement inférieure à Z .
- b) À l'aide de la question 16, en déduire que Y est stochastiquement inférieure à W .