

ECRICOME

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2014

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Exercice 1

Exercice 1 – Un opérateur de moyenne

$$\varphi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \text{ sur } E = \text{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n).$$

Corrigé – Exercice 1.

1. Structure de E .

Si $f(x) = xP(x) + x \ln(x)Q(x)$ avec $P = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$ et $Q = \sum_{j=0}^{n-1} b_j X^j$, alors $f = \sum_{k=1}^n (a_{k-1} u_k + b_{k-1} v_k)$. Réciproquement, toute combinaison linéaire des u_k, v_k est de cette forme. E est donc l'ensemble des combinaisons linéaires des u_k, v_k .

$$E = \text{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_{+}^{\mathbb{R}^*}.$$

2. Prolongement et images des vecteurs de base.

Pour $k \geq 1$, $u_k(x) \rightarrow 0$ et $v_k(x) = x^k \ln x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$ (croissances comparées). Toute $f \in E$ se prolonge donc par continuité en 0, avec $f(0) = 0$, et $\int_0^x f$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

$\varphi(u_k)(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1}$. Pour $\varphi(v_k)$, on intègre par parties sur $[\varepsilon, x]$, avec $t \mapsto \frac{t^{k+1}}{k+1}$ et $\ln$, de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\int_{\varepsilon}^x t^k \ln t dt = \left[\frac{t^{k+1} \ln t}{k+1} \right]_{\varepsilon}^x - \int_{\varepsilon}^x \frac{t^k}{k+1} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^{k+1} \ln x}{k+1} - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}.$$

$$\varphi(u_k) = \frac{1}{k+1} u_k, \quad \varphi(v_k) = \frac{1}{k+1} v_k - \frac{1}{(k+1)^2} u_k.$$

3. Linéarité.

Par linéarité de l'intégrale, $\varphi(\alpha f + g) = \alpha \varphi(f) + \varphi(g)$. Si $f = \sum (a_k u_k + b_k v_k)$, alors $\varphi(f) = \sum (a_k \varphi(u_k) + b_k \varphi(v_k)) \in E$ d'après 2.

$$\varphi \text{ est un endomorphisme de } E.$$

4. Matrice.

Dans la base $\mathcal{B} = (u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$, la matrice est diagonale par blocs :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_n \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k+1} & -\frac{1}{(k+1)^2} \\ 0 & \frac{1}{k+1} \end{pmatrix}.$$

5. Bijectivité et valeurs propres.

La matrice est triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux $\frac{1}{k+1} \neq 0$; elle est donc inversible, et ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

$$\varphi \text{ est bijectif, } \operatorname{Sp}(\varphi) = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n+1} \right\}.$$

6. Vecteurs propres.

Posons $F(x) = \int_0^x f$: F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $F' = f$, et $\varphi(f) = \lambda f$ s'écrit $F(x) = \lambda x f(x)$. Alors

$$g'(x) = x^{-1/\lambda-1} \left(-\frac{F(x)}{\lambda} + x f(x) \right) = 0.$$

g est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, égale à un réel C , d'où $F(x) = Cx^{1/\lambda}$ et $f(x) = \frac{C}{\lambda} x^{1/\lambda-1}$.

$$\int_0^x f(t) dt = Cx^{1/\lambda}, \quad f(x) = \frac{C}{\lambda} x^{\frac{1}{\lambda}-1}.$$

Avec $\lambda = \frac{1}{k+1}$, on obtient $f = C(k+1)u_k$.

7. Sous-espaces propres.

Par 6, le sous-espace propre associé à $\frac{1}{k+1}$ est inclus dans $\operatorname{Vect}(u_k)$, et u_k est vecteur propre (question 2) : il est égal à $\operatorname{Vect}(u_k)$. La somme des dimensions vaut $n < 2n = \dim E$.

$$\dim E_{1/(k+1)}(\varphi) = 1 \text{ pour tout } k ; \varphi \text{ n'est pas diagonalisable.}$$

Exercice 2**Exercice 2 – La fonction digamma $\Psi = \Gamma'/\Gamma$**

Questions 1 à 5.

Corrigé – Exercice 2.**1. Convergence.**

La fonction $h : t \mapsto (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

- En $+\infty$: $t^2 |h(t)| = |\ln t|^k t^{x+1} e^{-t} \rightarrow 0$ (croissances comparées), donc $|h(t)| \leq \frac{1}{t^2}$ pour t grand.
- En 0 : $\frac{|h(t)|}{t^{x/2-1}} = |\ln t|^k t^{x/2} e^{-t} \rightarrow 0$, et $\int_0^1 t^{x/2-1} dt$ converge ($1 - \frac{x}{2} < 1$).

Par comparaison de fonctions positives :

$$\int_0^{+\infty} (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1} dt \text{ converge absolument.}$$

2. Relation fonctionnelle.

Par intégration par parties (cours), $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Comme $\Gamma > 0$ (intégrale

d'une fonction continue strictement positive), $L(x+1) = \ln x + L(x)$; en dérivant, $\Psi(x+1) = \frac{1}{x} + \Psi(x)$.

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{1}{x}, \quad \Psi(n+2) - \Psi(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}.$$

3. Cauchy-Schwarz.

Soit $\varepsilon \in]0, A[$ et $w(t) = e^{-t}t^{x-1} > 0$. Les fonctions $t \mapsto \ln t \sqrt{w(t)}$ et $\sqrt{w}$ sont continues sur $[\varepsilon, A]$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_{\varepsilon}^A fg$:

$$\left(\int_{\varepsilon}^A \ln(t)w(t) dt \right)^2 \leq \int_{\varepsilon}^A (\ln t)^2 w(t) dt \int_{\varepsilon}^A w(t) dt.$$

Les trois intégrales convergent quand $\varepsilon \rightarrow 0$ (question 1), d'où :

$$\left(\int_0^A \ln(t)e^{-t}t^{x-1} dt \right)^2 \leq \left(\int_0^A (\ln t)^2 e^{-t}t^{x-1} dt \right) \left(\int_0^A e^{-t}t^{x-1} dt \right).$$

4. Croissance de Ψ .

On fait tendre A vers $+\infty$; les intégrales convergent vers $\Gamma'(x)$, $\Gamma''(x)$ et $\Gamma(x)$.

$$(\Gamma'(x))^2 \leq \Gamma(x)\Gamma''(x).$$

Alors $\Psi' = \frac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2} \geq 0$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

$$\Psi \text{ est croissante sur }]0, +\infty[.$$

5. Une série.

a) On a $\frac{1}{k^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{k-a} - \frac{1}{k+a} \right)$. Par 2 avec $x = k \mp a > 0$, $\frac{1}{k \mp a} = \Psi(k+1 \mp a) - \Psi(k \mp a)$.
Par télescopage :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k-a} = \Psi(n+1-a) - \Psi(1-a), \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+a} = \Psi(n+1+a) - \Psi(1+a).$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - a^2} = \frac{1}{2a} (\Psi(1+a) - \Psi(1-a)) - \frac{1}{2a} (\Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a)).$$

Par croissance de Ψ et puisque $n < n+1-a < n+1+a < n+2$:

$$0 \leq \Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a) \leq \Psi(n+2) - \Psi(n).$$

b) $\Psi(n+2) - \Psi(n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$; par encadrement, $\Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a) \rightarrow 0$.
Les sommes partielles convergent donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - a^2} = \frac{\Psi(1+a) - \Psi(1-a)}{2a}.$$

Problème – Tournoi et suites de probabilités

Problème – Partie I – Le cas $N = 3, p = q = \frac{1}{2}$

Questions 1 à 5.

Corrigé – Problème.

1. Simulation.

On suppose `numpy.random` importé sous le nom `rd`.

a) On peut écrire :

```
def duel():
    x = rd.random()
    if x < 1/2:
        return 1
    else:
        return 0
```

b) Les trois arguments sont égaux si et seulement si `a == b` et `b == c` :

```
def test_victoire(a, b, c):
    return a == b and b == c
```

c) On convient que `duel()` renvoie 1 lorsque le nouveau joueur A_n remporte le duel numéro n . On mémorise dans `a, b, c` les numéros des vainqueurs des trois derniers duels (initialisés à trois valeurs distinctes fictives). Un joueur a gagné trois duels consécutifs exactement lorsque ces trois numéros sont égaux.

```
def tournoi():
    a, b, c = -1, -2, -3
    gagnant = 0          # A0 est en jeu avant le duel 1
    n = 0
    while not test_victoire(a, b, c):
        n = n + 1
        if duel() == 1:
            gagnant = n   # le joueur An remporte le duel n
        a = b
        b = c
        c = gagnant
    return n
```

2. Les trois premiers duels.

	gagnants possibles			
duel 1	0	1		
duel 2	0	1	2	
duel 3	0	1	2	3

Personne ne peut avoir 3 victoires avant le duel 3, donc $\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(E_2) = 1$. À l'issue du duel 3, seuls A_0 (qui gagne les duels 1, 2, 3, avec probabilité $\frac{1}{8}$) et A_1 (idem) peuvent avoir trois victoires.

$$\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(E_2) = 1, \quad \mathbb{P}(E_3) = \frac{3}{4} = \frac{1}{2}\mathbb{P}(E_2) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(E_1).$$

3. Relation (R_1) .

C'est le cas $N = 3$, $p = q = \frac{1}{2}$ de la relation (R_2) démontrée en II.2 (avec la même preuve). À l'issue du duel $n \geq 3$, sur E_n , le vainqueur du duel n a 1 ou 2 victoires :

- une victoire (probabilité $\frac{1}{2}$) : il s'agit de A_n , et E_n se réduit alors à E_{n-1} ;
- deux victoires (probabilité $\frac{1}{4}$) : il s'agit de A_{n-1} , qui a gagné les duels $n-1$ et n , et E_n se réduit alors à E_{n-2} .

Ces événements dépendent de duels disjoints, donc sont indépendants.

$$\mathbb{P}(E_n) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(E_{n-1}) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(E_{n-2}) \quad (n \geq 3).$$

4. Expression de $\mathbb{P}(E_n)$.

L'équation caractéristique $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{4} = 0$ a deux racines réelles distinctes $r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$. La suite vérifie une récurrence linéaire d'ordre 2 (à partir des rangs 1 et 2), donc il existe λ, μ tels que $\mathbb{P}(E_n) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ pour tout $n \geq 1$. Comme $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$:

$$r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(E_n) = 0.$$

5. Le tournoi désigne un vainqueur.

La suite (E_n) est décroissante. Par le théorème de la limite monotone, $\mathbb{P}(\bigcap_{n \geq 2} E_n) = \lim \mathbb{P}(E_n) = 0$. L'événement « le tournoi désignera un vainqueur » est le complémentaire de $\bigcap E_n$.

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 2} E_n\right) = 0, \quad \mathbb{P}(\text{un vainqueur est désigné}) = 1.$$

Problème – Partie II – Le cas général

Questions 1 à 8. On convient que $E_0 = \Omega$.

Corrigé – Problème.**1. Probabilités conditionnelles.**

Soit $n \geq N$ et $k \leq N-1 < n$. Le vainqueur du duel n a exactement k victoires si et seulement si A_{n-k+1} gagne son premier duel (numéro $n-k+1$, probabilité p) puis les $k-1$ suivants (probabilité q chacun). Donc $\mathbb{P}(A_k^{(n)}) = pq^{k-1} > 0$, et cet événement ne dépend que des duels $n-k+1, \dots, n$. Sur $A_k^{(n)}$, aucun joueur n'atteint N victoires lors des duels $n-k+1, \dots, n$ (le seul vainqueur de ces duels en a $k < N$). Donc $E_n \cap A_k^{(n)} = E_{n-k} \cap A_k^{(n)}$, et E_{n-k} ne dépend que des duels $1, \dots, n-k$, d'où l'indépendance.

$$\mathbb{P}_{A_k^{(n)}}(E_n) = \mathbb{P}(E_{n-k}).$$

2. Relation (R_2) .

Sur E_n , le vainqueur du duel n a au plus $N-1$ victoires. Les $A_k^{(n)}$ ($1 \leq k \leq N-1$) sont deux à deux incompatibles et $E_n \subset \bigcup_k A_k^{(n)}$. Par la formule des probabilités totales et 1

:

$$\mathbb{P}(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} \mathbb{P}(A_k^{(n)}) \mathbb{P}(E_{n-k}) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} \mathbb{P}(E_{n-k}).$$

3. Premières valeurs.

Avant le duel N , personne ne peut avoir N victoires : $\mathbb{P}(E_1) = \dots = \mathbb{P}(E_{N-1}) = 1$. À l'issue du duel N , seuls deux cas donnent un vainqueur :

- A_0 gagne les N duels, avec probabilité q^N ;
- A_1 gagne les N duels, avec probabilité pq^{N-1} .

$$\mathbb{P}(E_n) = 1 \ (n \leq N-1), \quad \mathbb{P}(E_N) = 1 - q^N - pq^{N-1} = 1 - q^{N-1}.$$

4. Relation (R_3).

$E_{n+1} \subset E_n$, et $E_n \setminus E_{n+1}$ est l'événement « le vainqueur est désigné au duel $n+1$ ». Comme $n+2-N \geq 2$, c'est le joueur A_{n+2-N} , qui gagne les duels $n+2-N, \dots, n+1$ (probabilité pq^{N-1}), alors qu'aucun vainqueur n'était désigné à l'issue du duel $n+1-N$ (événement E_{n+1-N} , indépendant). Sur ce dernier événement, personne n'atteint N victoires lors des duels $n+2-N, \dots, n$.

$$\mathbb{P}(E_n) - \mathbb{P}(E_{n+1}) = pq^{N-1} \mathbb{P}(E_{n-N+1}).$$

5. La racine r_N .

Q est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ (coefficients des puissances de X strictement positifs), continue, avec $Q(0) = -1$ et $Q(x) \rightarrow +\infty$. Par le théorème de la bijection, elle s'annule une seule fois sur $[0, +\infty[$. De plus $Q(1) = p \frac{1-q^{N-1}}{1-q} - 1 = -q^{N-1} < 0$, donc $r_N > 1$. Enfin $Q'(r_N) = \sum_k kpq^{k-1}r_N^{k-1} > 0$.

$$\exists! r_N \geq 0, \quad Q(r_N) = 0 ; \quad r_N > 1, \quad Q'(r_N) > 0.$$

6. Majoration.

Récurrence forte sur n . Pour $n \leq N$, $\mathbb{P}(E_n) \leq 1 \leq r_N^{N-n}$. Si l'inégalité est vraie jusqu'au rang $n-1 \geq N$, (R_2) donne

$$\mathbb{P}(E_n) \leq \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} r_N^{N-n+k} = r_N^{N-n} \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} r_N^k = r_N^{N-n} (Q(r_N) + 1) = r_N^{N-n}.$$

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}(E_n) \leq \left(\frac{1}{r_N} \right)^{n-N}.$$

7. Somme de la série.

$0 \leq \mathbb{P}(E_n) \leq r_N^N \left(\frac{1}{r_N} \right)^n$, terme général d'une série géométrique convergente ($r_N > 1$) : la série converge. On somme (R_3) pour n de N à M :

$$\mathbb{P}(E_N) - \mathbb{P}(E_{M+1}) = pq^{N-1} \sum_{j=1}^{M-N+1} \mathbb{P}(E_j).$$

On fait tendre M vers $+\infty$, avec $\mathbb{P}(E_{M+1}) \rightarrow 0$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n) = \frac{1 - q^{N-1}}{pq^{N-1}}.$$

8. Durée du tournoi.

- a) $[X = n]$ signifie que le vainqueur est proclamé à l'issue du duel n : il ne l'était pas à l'issue du duel $n - 1$ (E_{n-1}), et il l'est à l'issue du duel n ($\overline{E_n}$).

$$[X = n] = E_{n-1} \cap \overline{E_n}.$$

- b) $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(E_{n-1}) - \mathbb{P}(E_n)$, car $E_n \subset E_{n-1}$. Pour $M \geq 2$, par décalage d'indice :

$$\sum_{n=2}^M n\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{M-1} (n+1)\mathbb{P}(E_n) - \sum_{n=2}^M n\mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(E_1) + \sum_{n=1}^{M-1} \mathbb{P}(E_n) - M\mathbb{P}(E_M).$$

Or $0 \leq M\mathbb{P}(E_M) \leq r_N^N M r_N^{-M} \rightarrow 0$ (croissances comparées). La série à termes positifs $\sum n\mathbb{P}(X = n)$ converge donc (la valeur $X = 0$ ne contribue pas), et, avec $\mathbb{P}(E_1) = 1$:

$$\mathbb{E}(X) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n) = 1 + \frac{1 - q^{N-1}}{pq^{N-1}}.$$

Par exemple, pour $N = 3$ et $p = \frac{1}{2}$, $\mathbb{E}(X) = 7$.