

ECRICOME

Mathématiques

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2014

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1 Exercice 1	2
<i>Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; applications linéaires ; intégrales.</i>	2
2 Exercice 2	2
<i>Thèmes abordés : Fonctions d'une variable ; intégrales généralisées ; séries.</i>	2
3 Problème : tournoi et suites de probabilités	3
<i>Thèmes abordés : Probabilités discrètes ; suites ; séries ; Python.</i>	3

1 Exercice 1

Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; applications linéaires ; intégrales.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ telles qu'il existe deux polynômes $P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = xP(x) + x \ln(x)Q(x).$$

Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, on pose

$$u_k : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^k \end{cases} \quad \text{et} \quad v_k : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^k \ln(x). \end{cases}$$

Pour toute fonction $f \in E$, on note $\varphi(f)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt,$$

et φ l'application qui à $f \in E$ associe $\varphi(f)$.

1. Prouver que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et que $E = \text{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$. On admet que la famille $\mathcal{B} = (u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$ est une base de E .
2. Justifier que chaque fonction $f \in E$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, calculer $\varphi(u_k)$ et $\varphi(v_k)$.
3. Démontrer que φ est linéaire. En déduire que $\varphi(f) \in E$ lorsque $f \in E$.
4. Écrire la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.
5. L'endomorphisme φ est-il bijectif ? Quelles sont ses valeurs propres ?
6. Soit $f \in E$ un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ . On suppose $\lambda \neq 0$ et on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = x^{-1/\lambda} \int_0^x f(t) dt.$$

Montrer que g est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire l'expression de la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$, puis celle de f .

7. Pour chaque valeur propre λ de φ , déterminer la dimension de l'espace propre associé. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

2 Exercice 2

Thèmes abordés : Fonctions d'une variable ; intégrales généralisées ; séries.

On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

On admet que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]0, +\infty[, \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Pour $x \in]0, +\infty[$, on pose $L(x) = \ln(\Gamma(x))$ et $\Psi(x) = L'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

1. Justifier que, pour tout $x > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\ln t)^k e^{-t} t^{x-1} dt$ est convergente.
2. Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et de $\Gamma(x)$. En déduire que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{1}{x},$$

puis préciser la valeur de $\Psi(n+2) - \Psi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, établir que

$$\forall (x, A) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \left(\int_0^A \ln(t) e^{-t} t^{x-1} dt \right)^2 \leq \left(\int_0^A (\ln t)^2 e^{-t} t^{x-1} dt \right) \left(\int_0^A e^{-t} t^{x-1} dt \right).$$

4. Démontrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$(\Gamma'(x))^2 \leq \Gamma(x) \Gamma''(x),$$

puis justifier que la fonction Ψ est croissante sur $]0, +\infty[$.

5. Soit $a \in]0, 1[$.

a) Prouver que, pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - a^2} = \frac{1}{2a} (\Psi(1+a) - \Psi(1-a)) - \frac{1}{2a} (\Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a)),$$

et que $0 \leq \Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a) \leq \Psi(n+2) - \Psi(n)$.

- b) Établir que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 - a^2}$ est convergente et calculer sa somme en fonction de Ψ et de a .

3 Problème : tournoi et suites de probabilités

Thèmes abordés : Probabilités discrètes ; suites ; séries ; Python.

Soient $p \in]0, 1[$ et $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 3$. On pose $q = 1 - p$. On considère un tournoi réunissant une infinité de joueurs $A_0, A_1, A_2, \dots$

- A_0 et A_1 s'affrontent lors du duel numéro 1 ; le perdant est éliminé et le gagnant reste en jeu.
- Le gagnant du premier duel affronte ensuite A_2 lors du duel numéro 2, puis le gagnant de ce duel affronte A_3 , et ainsi de suite.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le joueur A_k participe au duel numéro k , qu'il remporte avec la probabilité p ; son adversaire remporte ce duel avec la probabilité q .
- Le gagnant du tournoi est le premier joueur, s'il y en a un, qui gagne N duels successifs.

Pour tout entier naturel n , on note E_n l'événement : « le gagnant du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du duel numéro n ».

Partie I : étude d'un cas particulier

On suppose dans cette partie que $N = 3$ et $p = q = \frac{1}{2}$.

1. *Simulation des duels.* On rappelle que la fonction `random()` du module `random` renvoie un réel aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.

- a) Écrire une fonction Python `duel` qui renvoie 1 si le nombre aléatoire créé est strictement inférieur à $\frac{1}{2}$, et 0 sinon.
 - b) Écrire une fonction Python `test_victoire(a, b, c)` qui renvoie `True` si les trois arguments sont égaux, et `False` sinon.
 - c) Écrire une fonction Python `tournoi` simulant un tournoi et renvoyant le nombre de duels nécessaires pour qu'un vainqueur soit désigné, c'est-à-dire qu'un joueur obtienne trois victoires consécutives. On pourra utiliser les fonctions précédentes sur trois résultats consécutifs.
2. Créer la liste des gagnants possibles pour chacun des trois premiers duels sous la forme du tableau suivant, puis déterminer $\mathbb{P}(E_1)$, $\mathbb{P}(E_2)$ et $\mathbb{P}(E_3)$. Vérifier que

$$\mathbb{P}(E_3) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(E_2) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(E_1).$$

	numéro du joueur gagnant le duel			
duel 1	0	1		
duel 2	0	1	2	
duel 3	0	1	2	3

3. En considérant le nombre de victoires déjà obtenues par le vainqueur du duel numéro n , démontrer que, pour tout $n \geq 3$,

$$(R_1) : \quad \mathbb{P}(E_n) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(E_{n-1}) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(E_{n-2}).$$

4. Justifier l'existence de quatre réels λ, μ, r_1, r_2 tels que, pour tout $n \geq 2$, $\mathbb{P}(E_n) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$. Le calcul explicite de λ et μ n'est pas demandé. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(E_n)$.
5. Que vaut $\mathbb{P}(\bigcap_{n \geq 2} E_n)$? Quelle est la probabilité de l'événement « le tournoi désignera un vainqueur »?

Partie II : étude du cas général

On revient au cas général. On considère le polynôme

$$Q(X) = \left(\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}X^k \right) - 1.$$

1. Pour $k \in \{1, \dots, N-1\}$, on note $A_k^{(n)}$ l'événement : « à l'issue du n -ième duel, le vainqueur du n -ième duel a obtenu exactement k victoires ». Justifier l'égalité, pour tout $n \geq N$,

$$\mathbb{P}_{A_k^{(n)}}(E_n) = \mathbb{P}(E_{n-k}).$$

2. Établir que, pour tout $n \geq N$,

$$(R_2) : \quad \mathbb{P}(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}\mathbb{P}(E_{n-k}).$$

3. Calculer $\mathbb{P}(E_1), \dots, \mathbb{P}(E_{N-1})$. En déduire que $\mathbb{P}(E_N) = 1 - q^{N-1}$.
4. Soit $n \geq N$. Démontrer la relation

$$(R_3) : \quad \mathbb{P}(E_n) - \mathbb{P}(E_{n+1}) = pq^{N-1}\mathbb{P}(E_{n-N+1}).$$

5. Prouver que l'équation $Q(x) = 0$ possède une unique solution sur $[0, +\infty[$. On note r_N cette solution. Justifier que $r_N > 1$ et $Q'(r_N) > 0$.
6. À l'aide de (R_2) , établir que, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(E_n) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}.$$

7. Établir la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(E_n)$ puis, en sommant (R_3) sur tous les entiers $n \geq N$, donner la valeur de $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(E_n)$.
8. On définit X comme le nombre de duels ayant eu lieu au moment de la proclamation du vainqueur ; on convient que $X = 0$ si le tournoi n'a pas de vainqueur.
- a) Soit $n \geq 2$. Justifier que les événements $(E_{n-1} \cap \overline{E_n})$ et $(X = n)$ sont égaux.
- b) Démontrer que X admet une espérance et exprimer $\mathbb{E}(X)$ en fonction de $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(E_n)$.
En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

La partie III du sujet d'origine est retirée : elle traite des nombres complexes, qui ne font plus partie du programme de mathématiques approfondies depuis 2023.