

EDHEC

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2014

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté. On note φ la densité de $\mathcal{N}(0, 1)$ et Φ sa fonction de répartition.

Exercice 1

Exercice 1 – Carrés de lois normales et intégrale $I(x)$

$$U = X^2, V = Y^2, W = U + V.$$

Corrigé – Exercice 1.

1. Loi de U et V .

- a) Pour $x \leq 0$, $F_U(x) = 0$. Pour $x > 0$, $F_U(x) = \mathbb{P}(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1$.
 F_U est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$: U est à densité, et pour $x > 0$,

$$f_U(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \varphi(\sqrt{x}) = \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{2\pi x}} = \frac{x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x/2}}{2^{1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

C'est la densité de la loi $\Gamma(2, \frac{1}{2})$ rappelée (et $f_U = 0$ sur $\mathbb{R}_-$) ; il en est de même pour V .

$$U \text{ et } V \text{ suivent la loi } \Gamma\left(2, \frac{1}{2}\right).$$

- b) $\frac{U}{2} \hookrightarrow \gamma(\frac{1}{2})$, donc $\mathbb{E}(\frac{U}{2}) = \mathbb{V}(\frac{U}{2}) = \frac{1}{2}$.

$$\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(V) = 1, \quad \mathbb{V}(U) = \mathbb{V}(V) = 2.$$

2. Loi de W et intégrale $I(x)$.

- a) $\frac{U}{2}$ et $\frac{V}{2}$ sont indépendantes de loi $\gamma(\frac{1}{2})$. Par stabilité des lois γ , $\frac{W}{2} \hookrightarrow \gamma(1) = \mathcal{E}(1)$, c'est-à-dire $W \hookrightarrow \Gamma(2, 1) = \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$W \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right), \quad \mathbb{E}(W) = 2, \quad \mathbb{V}(W) = 4.$$

- b) $f_U(t) = 0$ pour $t < 0$, et $f_V(x-t) = 0$ pour $t > x$. L'intégrande est donc nulle hors de $[0, x]$.

$$f_W(x) = \int_0^x f_U(t) f_V(x-t) dt.$$

c) Pour $x > 0$:

$$f_W(x) = \int_0^x \frac{e^{-t/2} e^{-(x-t)/2}}{2\pi \sqrt{t(x-t)}} dt = \frac{e^{-x/2}}{2\pi} I(x).$$

Cette intégrale converge (formule admise en b) ; on le voit aussi par les équivalents $\frac{1}{\sqrt{t(x-t)}} \sim \frac{1}{\sqrt{xt}}$ en 0 et $\sim \frac{1}{\sqrt{x(x-t)}}$ en x , intégrales de Riemann d'exposant $\frac{1}{2} < 1$. Le changement de variable affine $t = xs$ donne $I(x) = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s(1-s)}} = I(1)$. Donc $f_W(x) = \frac{I(1)}{2\pi} e^{-x/2}$ sur $]0, +\infty[$. Comme $\int_0^{+\infty} f_W = 1$ et $\int_0^{+\infty} e^{-x/2} dx = 2$, on obtient $\frac{I(1)}{2\pi} \times 2 = 1$.

$$\forall x > 0, \quad I(x) = \pi.$$

Exercice 2

Exercice 2 – L'endomorphisme $M \mapsto \text{Tr}(A)M - \text{Tr}(M)A$

Questions 1 à 6.

Corrigé – Exercice 2.

1. Linéarité.

$f(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et pour M, N et α réel, par linéarité de la trace, $f(\alpha M + N) = \alpha f(M) + f(N)$.

$$f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})).$$

2. $f \neq 0$.

- Si $\text{Tr}(A) \neq 0$: soit $E_{1,2}$ la matrice élémentaire (de trace nulle, car $n \geq 2$). Alors $f(E_{1,2}) = \text{Tr}(A)E_{1,2} \neq 0$.
- Si $\text{Tr}(A) = 0$: $f(I_n) = -nA \neq 0$.

$$f \text{ n'est pas l'endomorphisme nul.}$$

3. Polynôme annulateur.

a) $\text{Tr}(f(M)) = \text{Tr}(A) \text{Tr}(M) - \text{Tr}(M) \text{Tr}(A) = 0$, d'où $f(f(M)) = \text{Tr}(A)f(M) - 0$.

$$f \circ f = \text{Tr}(A)f.$$

b) Si $f(M) = \lambda M$ avec $M \neq 0$, alors $\lambda^2 M = \text{Tr}(A)\lambda M$, donc $\lambda^2 = \text{Tr}(A)\lambda$.

$$\text{Sp}(f) \subset \{0, \text{Tr}(A)\}.$$

4. La valeur propre 0.

$f(A) = \text{Tr}(A)A - \text{Tr}(A)A = 0$ avec $A \neq 0$.

$$0 \in \text{Sp}(f), \quad A \text{ étant un vecteur propre associé.}$$

5. Cas $\text{Tr}(A) = 0$.

Alors $\text{Sp}(f) = \{0\}$. Si f était diagonalisable, elle serait nulle, ce qui contredit 2.

f n'est pas diagonalisable.

6. Cas $\text{Tr}(A) \neq 0$.

- a) Tr est une forme linéaire non nulle ($\text{Tr}(I_n) = n$), donc surjective sur $\mathbb{R}$. Par le théorème du rang :

$$\dim \text{Ker}(\text{Tr}) = n^2 - 1.$$

- b) Pour $M \in \text{Ker}(\text{Tr})$, $f(M) = \text{Tr}(A)M$. Donc $\dim E_{\text{Tr}(A)}(f) \geq n^2 - 1$; de plus $\dim E_0(f) \geq 1$ par 4, et $\text{Tr}(A) \neq 0$. La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut au moins $n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

f est diagonalisable.

Exercice 3

Exercice 3 – Calcul de $\Delta = \inf \int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t} dt$

Deux méthodes. On utilise $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = \Gamma(k+1) = k!$.

Corrigé – Exercice 3.

1. Le produit scalaire.

- a) C'est $\Gamma(k+1)$, intégrale convergente ($t^k e^{-t} = o(1/t^2)$ en $+\infty$, fonction continue sur $[0, +\infty[$).

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k! \text{ converge.}$$

- b) PQ est un polynôme, donc l'intégrale converge par a). L'application est symétrique, bilinéaire (linéarité de l'intégrale) et positive. Si $\langle P, P \rangle = 0$, la fonction continue et positive $P^2 e^{-t}$ est nulle sur $[0, +\infty[$; P a alors une infinité de racines, donc $P = 0$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

2. Expression.

$$\|X^3 - Q\|^2 = \int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t} dt.$$

3. Projection orthogonale.

- a) Théorème de la projection orthogonale : si F est un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien, alors pour tout vecteur v , il existe un unique $Q_0 \in F$ tel

que $\|v - Q_0\| = \min_{Q \in F} \|v - Q\|$. C'est le projeté orthogonal $p_F(v)$, caractérisé par $v - Q_0 \perp F$.

$$Q_0 = p_F(X^3).$$

b) $X^3 - Q_0$ est orthogonal à $F = \text{Vect}(1, X)$.

$$\langle X^3 - Q_0, 1 \rangle = \langle X^3 - Q_0, X \rangle = 0.$$

c) Avec $\langle X^j, X^i \rangle = (i + j)!$:

$$\begin{cases} 6 - x_0 - y_0 = 0 \\ 24 - 2x_0 - y_0 = 0 \end{cases} \iff (x_0, y_0) = (18, -12).$$

d) $\Delta = \|X^3 - Q_0\|^2 = \langle X^3 - Q_0, X^3 \rangle$, car $X^3 - Q_0 \perp Q_0$. Donc

$$\Delta = 6! - 18 \cdot 4! + 12 \cdot 3! = 720 - 432 + 72.$$

$$\Delta = 360.$$

4. Expression polynomiale.

En développant et avec $\int t^k e^{-t} = k!$:

$$f(x, y) = 720 + 2x^2 + y^2 + 2xy - 48x - 12y.$$

5. Point critique.

$\partial_1 f(x, y) = 4x + 2y - 48$ et $\partial_2 f(x, y) = 2y + 2x - 12$. Le système $2x + y = 24$, $x + y = 6$ a pour unique solution :

$$(x_0, y_0) = (18, -12).$$

6. Minimum local.

La hessienne est $H = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Pour $(h, k) \neq (0, 0)$, la forme quadratique associée vérifie $4h^2 + 4hk + 2k^2 = 2(h+k)^2 + 2h^2 > 0$. Si λ est valeur propre de la matrice symétrique H , de vecteur propre v , alors $\lambda \|v\|^2 = {}^t v H v > 0$: les valeurs propres de H sont strictement positives, et f admet en $(18, -12)$ un minimum local.

$$m = f(18, -12) = 720 + 648 + 144 - 432 - 864 + 144 = 360.$$

7. Minimum global.

f est polynomiale de degré 2 et $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Pour tous h, k réels :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + 2h^2 + k^2 + 2hk = m + (h + k)^2 + h^2 \geq m.$$

$$m = 360 = \Delta \text{ est le minimum global de } f.$$

Problème

Problème – Question préliminaire et partie I – Cas discrets

$Y = \int_0^1 \max(X, t) dt$. On suppose `numpy` importé sous le nom `np` et `numpy.random` sous le nom `rd`.

Corrigé – Problème.

1. Question préliminaire.

- a) On a $\max(x, t) = \frac{x+t+|x-t|}{2}$, qui est continue en t (somme et composée de fonctions continues).

$$t \mapsto \max(x, t) \text{ est continue sur } \mathbb{R}.$$

- b) • Si $x \leq 0$, $\max(x, t) = t$ sur $[0, 1]$, donc $y = \frac{1}{2}$.
 • Si $x \geq 1$, $\max(x, t) = x$ sur $[0, 1]$, donc $y = x$.
 • Si $0 < x < 1$, par la relation de Chasles, $y = \int_0^x x dt + \int_x^1 t dt = x^2 + \frac{1-x^2}{2}$.

$$y = \frac{1}{2} \ (x \leq 0), \quad y = \frac{x^2 + 1}{2} \ (0 < x < 1), \quad y = x \ (x \geq 1).$$

2. Loi géométrique.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors $X \geq 1$, donc par 1.b) :

$$Y = X.$$

3. Un exemple à trois valeurs.

a)

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

- b) Si $X \in \{-1, 0\}$, alors $Y = \frac{1}{2}$; si $X = 1$, alors $Y = 1$. Donc $Y(\Omega) = \{\frac{1}{2}, 1\}$, et :

$$\mathbb{P}\left(Y = \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}, \quad \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{E}(Y) = \frac{5}{8}, \quad \mathbb{V}(Y) = \frac{7}{16} - \frac{25}{64} = \frac{3}{64}.$$

- c) `u` prend chacune des valeurs 0, 1, 2, 3 avec probabilité $\frac{1}{4}$; on renvoie 1 dans un seul de ces cas.

```
def y():
    u = rd.randint(0, 4)
    if u == 0:
        return 1
    else:
        return 1/2
```

4. Loi de Poisson.

- a) Si $X = 0$, alors $Y = \frac{1}{2}$; si $X = k \geq 1$, alors $Y = k$.

$$Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}\left(Y = \frac{1}{2}\right) = e^{-\lambda}, \quad \forall k \geq 1, \quad \mathbb{P}(Y = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

b) $Y = X + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[X=0]}$ et $Y^2 = X^2 + \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[X=0]}$ (car $X\mathbf{1}_{[X=0]} = 0$). Par linéarité :

$$\mathbb{E}(Y) = \lambda + \frac{e^{-\lambda}}{2}, \quad \mathbb{E}(Y^2) = \lambda + \lambda^2 + \frac{e^{-\lambda}}{4}.$$

$$\mathbb{E}(Y) = \lambda + \frac{e^{-\lambda}}{2}, \quad \mathbb{V}(Y) = \lambda + \frac{e^{-\lambda}}{4} - \lambda e^{-\lambda} - \frac{e^{-2\lambda}}{4}.$$

Problème – Partie II – Cas à densité

Questions 5 à 7.

Corrigé – Problème.

5. Loi uniforme.

a) Si $X \in]0, 1[$, 1.b) donne $Y = \frac{X^2+1}{2}$; si $X = 0$, $Y = \frac{1}{2} = \frac{0^2+1}{2}$.

$$Y = \frac{X^2 + 1}{2}.$$

b) $x \mapsto \frac{x^2+1}{2}$ est une bijection croissante de $[0, 1[$ sur $[\frac{1}{2}, 1[$.

$$Y(\Omega) = [\frac{1}{2}, 1[.$$

c) Pour $x \in [\frac{1}{2}, 1[$: $F_Y(x) = \mathbb{P}(X^2 \leq 2x - 1) = \mathbb{P}(X \leq \sqrt{2x - 1})$, car $X \geq 0$.

$$F_Y(x) = \sqrt{2x - 1}.$$

d) $F_Y = 0$ sur $] -\infty, \frac{1}{2}[$, $F_Y = 1$ sur $[1, +\infty[$, et $F_Y(x) = \sqrt{2x - 1}$ entre les deux. F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ (valeurs 0 en $\frac{1}{2}$ et 1 en 1) et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en $\frac{1}{2}$ et 1.

$$Y \text{ est à densité.}$$

e)

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{\mathbb{E}(X^2) + 1}{2} = \frac{\frac{1}{3} + 1}{2} = \frac{2}{3}.$$

f) On simule X par `rd.random()` et on applique a) :

```
def y():
    return (rd.random()*2 + 1) / 2
```

6. Loi exponentielle décalée.

a) $X \geq 1$ presque sûrement, donc :

$$Y = X.$$

b) $Y = 1 + (X - 1)$ avec $X - 1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

$$\mathbb{E}(Y) = 1 + \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{V}(Y) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

- c) $W \geq 0$ et, pour $w \geq 0$, $\mathbb{P}(W > w) = \mathbb{P}(1 - U < e^{-\lambda w}) = e^{-\lambda w}$, car $1 - U$ suit la loi uniforme sur $]0, 1]$. Donc $W \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, et $Y = X$ a même loi que $1 + W$.

```
def y(lamb):
    return 1 - np.log(1 - rd.random()) / lamb
```

7. Loi normale.

- a) • Si $X \leq 0$, $Y = \frac{1}{2}$.
 • Si $0 < X < 1$, $Y = \frac{X^2+1}{2} \in]\frac{1}{2}, 1]$.
 • Si $X \geq 1$, $Y = X \in [1, +\infty[$.

Comme $X(\Omega) = \mathbb{R}$, toutes ces valeurs sont atteintes.

$$Y(\Omega) = \left[\frac{1}{2}, +\infty[\right].$$

b)

$$\mathbb{P}\left(Y = \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}(X \leq 0) = \frac{1}{2}.$$

- c) On utilise le système complet d'événements $([X \leq 0], [0 < X \leq 1], [X > 1])$.

- Pour $x < \frac{1}{2}$, $F_Y(x) = 0$.
- Pour $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$: $F_Y(x) = \frac{1}{2} + \mathbb{P}(0 < X \leq \sqrt{2x-1}) + 0 = \frac{1}{2} + \Phi(\sqrt{2x-1}) - \frac{1}{2}$.
- Pour $x > 1$: $F_Y(x) = \frac{1}{2} + \left(\Phi(1) - \frac{1}{2}\right) + (\Phi(x) - \Phi(1))$.

$$F_Y(x) = 0 \quad \left(x < \frac{1}{2}\right), \quad \Phi(\sqrt{2x-1}) \quad \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1\right), \quad \Phi(x) \quad (x > 1).$$

- d) F_Y est discontinue en $\frac{1}{2}$ (saut de $\frac{1}{2}$), donc Y n'est pas à densité. $Y(\Omega) = [\frac{1}{2}, +\infty[$ n'est pas dénombrable, donc Y n'est pas discrète.

$$Y \text{ n'est ni à densité, ni discrète.}$$

- e) $S = \sum_{k=1}^{48} U_k$ est une somme de 48 variables indépendantes de même loi, d'espérance $\frac{1}{2}$ et de variance $\frac{1}{12}$. Donc $\mathbb{E}(S) = 24$ et $\mathbb{V}(S) = 4$, et $\frac{S-24}{2}$ est la variable centrée réduite associée. Par le théorème central limite, sa loi est proche de $\mathcal{N}(0, 1)$ (48 est « grand »).

```
def y():
    aux = 0
    for k in range(48):
        aux = aux + rd.random()
    x = (aux - 24) / 2
    if x <= 0:
        return 1/2
    elif x < 1:
        return (x**2 + 1) / 2
    else:
        return x
```