emlyon business school

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2014

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Problème 1

Problème 1 – Parties I à III – L'opérateur de moyenne T

$T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$.

Corrigé – Problème 1.

1. **Régularité de $T(f)$.**

   Soit $G : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $G' = f$ (f continue). Alors $T(f)(x) = \frac{1}{2}(G(x+1) - G(x-1))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée et différence de fonctions $\mathcal{C}^1$.

   $$\boxed{T(f) \in E_1, \qquad (T(f))'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)).}$$

2. **Linéarité.**

   Par linéarité de l'intégrale, $T(\alpha f + g) = \alpha T(f) + T(g)$, et $T(f) \in E_1 \subset E$.

   $$\boxed{T \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

3. **Surjectivité.**

   $\operatorname{Im} T \subset E_1$, et $x \mapsto |x|$ appartient à $E \setminus E_1$ (elle n'est pas dérivable en 0).

   $$\boxed{T \text{ n'est pas surjectif.}}$$

4. **Parité.**

   Avec le changement de variable $u = -t$ (affine, de classe $\mathcal{C}^1$) :

   $$T(f)(-x) = \frac{1}{2}\int_{-x-1}^{-x+1} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(-u)\,du.$$

   Si f est paire (resp. impaire), on obtient $T(f)(x)$ (resp. $-T(f)(x)$).

   $$\boxed{f \text{ paire (resp. impaire)} \implies T(f) \text{ paire (resp. impaire).}}$$

5. **Limites en $\pm\infty$.**

   Si $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge, alors $T(f)(x) = \frac{1}{2}\left(\int_{x-1}^{+\infty} f - \int_{x+1}^{+\infty} f\right)$, différence de deux restes d'une intégrale convergente qui tendent vers 0 quand $x \to +\infty$. De même, $T(f)(x) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{x+1} f - \int_{-\infty}^{x-1} f\right) \to 0$ quand $x \to -\infty$.

   $$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} T(f)(x) = 0.}$$

6. Non-injectivité.

On calcule

$$T(s)(x) = \frac{1}{2\pi}\Big[-\cos(\pi t)\Big]_{x-1}^{x+1} = \frac{1}{2\pi}\big(\cos(\pi x - \pi) - \cos(\pi x + \pi)\big) = 0.$$

Ainsi $T(s) = 0$ avec $s \neq 0$.

$$\boxed{T(s) = 0 : T \text{ n'est pas injectif.}}$$

7. Image de f_a.

Pour $a \neq 0$, $T(f_a)(x) = \frac{1}{2a}\left(e^{a(x+1)} - e^{a(x-1)}\right) = \frac{e^a - e^{-a}}{2a} e^{ax}$. Pour $a = 0$, $T(f_0)(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

$$\boxed{T(f_a)(x) = \frac{e^a - e^{-a}}{2a} e^{ax} \ (a \neq 0), \qquad T(f_0)(x) = 1.}$$

8. Relation de vecteur propre.

D'après 7 :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \quad T(f_a) = \varphi(a) f_a.}$$

9. Étude de φ.

Sur $\mathbb{R}^*$, φ est dérivable (quotient), et

$$\varphi'(a) = \frac{a(e^a + e^{-a}) - (e^a - e^{-a})}{2a^2} = \frac{e^a(a-1) + e^{-a}(a+1)}{2a^2}.$$

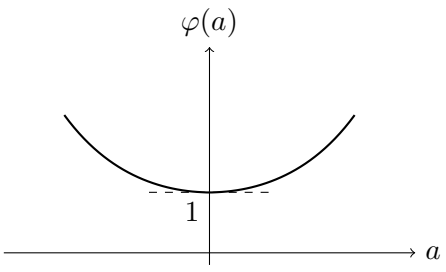
En 0, par Taylor-Young, $e^a - e^{-a} = 2a + \frac{a^3}{3} + o(a^3)$, donc $\varphi(a) = 1 + \frac{a^2}{6} + o(a^2)$. Ainsi φ est continue en 0, et $\frac{\varphi(a) - \varphi(0)}{a} \to 0$: φ est dérivable en 0 avec $\varphi'(0) = 0$.

$$\boxed{\varphi'(a) = \frac{e^a(a-1) + e^{-a}(a+1)}{2a^2} \ (a \neq 0), \qquad \varphi'(0) = 0.}$$

Soit $g(a) = e^a(a-1) + e^{-a}(a+1)$. On a $g(0) = 0$ et $g'(a) = ae^a - ae^{-a} = a(e^a - e^{-a}) > 0$ pour $a \neq 0$. Donc g est strictement croissante.

$$\boxed{g(a) < 0 \text{ si } a < 0, \qquad g(0) = 0, \qquad g(a) > 0 \text{ si } a > 0.}$$

Donc φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, de minimum $\varphi(0) = 1$. Elle est paire, et $\varphi(a) \to +\infty$ en $\pm\infty$ (croissances comparées).



(Tangente horizontale en $(0, 1)$.)

10. Valeurs propres $\lambda \geqslant 1$.

φ est continue et strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$ (bijection). Pour $\lambda \geqslant 1$, il existe $a \geqslant 0$ tel que $\varphi(a) = \lambda$, et alors $f_a \neq 0$ vérifie $T(f_a) = \lambda f_a$.

$$\boxed{\forall \lambda \geqslant 1,\ \exists f \in E \setminus \{0\},\ T(f) = \lambda f.}$$

11. Calcul de $T(h)$.

h est continue (quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas) et paire ; par 4, $T(h)$ est paire. Soit $x \geqslant 0$.

- Si $0 \leqslant x \leqslant 1 : x - 1 \leqslant 0 \leqslant x + 1$, et $\int_{x-1}^{0} \frac{dt}{1-t} + \int_{0}^{x+1} \frac{dt}{1+t} = \ln(2-x) + \ln(2+x)$.
- Si $x > 1 : \int_{x-1}^{x+1} \frac{dt}{1+t} = \ln \frac{x+2}{x}$.

$$\boxed{T(h)(x) = \frac{1}{2}\ln(4 - x^2)\ (0 \leqslant x \leqslant 1), \qquad T(h)(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x+2}{x}\ (x > 1),}$$

$$\boxed{T(h)(-x) = T(h)(x).}$$

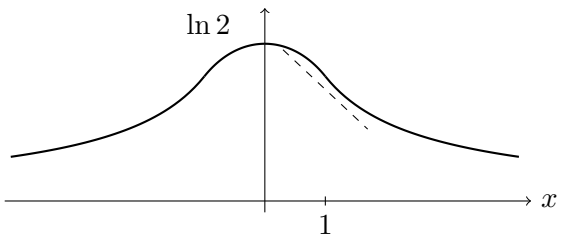
12. Variations de $T(h)$.

- Sur $[0, 1]$: $(T(h))'(x) = \frac{-x}{4-x^2} \leqslant 0$.
- Sur $]1, +\infty[$: $(T(h))'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}\right) < 0$.

$T(h)$ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (croissante sur $\mathbb{R}_-$ par parité), de maximum $T(h)(0) = \ln 2 \approx 0{,}69$, avec $T(h)(1) = \frac{1}{2}\ln 3 \approx 0{,}55$ et $\lim_{\pm\infty} T(h) = 0$. Les tangentes :

- en 0, horizontale ($(T(h))'(0) = 0$) ;
- en 1, de pente $(T(h))'(1) = \frac{h(2)-h(0)}{2} = -\frac{1}{3}$ (formule de 1, les deux expressions donnant bien $-\frac{1}{3}$).

$$\boxed{\text{Tangente en } 0 \ :\ y = \ln 2\ ; \qquad \text{tangente en } 1 \ :\ y = \tfrac{1}{2}\ln 3 - \tfrac{1}{3}(x-1).}$$



13. Réciproque de 5.

$T(h)(x) \to 0$ en $\pm\infty$, mais $h(t) \sim \frac{1}{|t|}$ en $\pm\infty$: l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} h$ diverge (Riemann, termes positifs).

$$\boxed{\text{La réciproque est fausse (contre-exemple } h).}$$

Problème 1 – Parties IV et V – Extrémums et densités

Questions 14 à 19. $F(x) = \ln(x+2) - \ln x$ et $H(x,y) = F(x) + F(y) - 2F(xy)$.

Corrigé – Problème 1.

14. Dérivées partielles.

Pour $(x,y) \in]1,+\infty[^2$, $xy > 1$. Donc H est de classe $\mathcal{C}^1$ (somme et composées de fonctions $\mathcal{C}^1$). Avec $F'(u) = \frac{1}{u+2} - \frac{1}{u} = -\frac{2}{u(u+2)}$:

$$\boxed{\partial_1 H(x,y) = F'(x) - 2yF'(xy) = \frac{2(2x+2-xy)}{x(x+2)(xy+2)},}$$

$$\boxed{\partial_2 H(x,y) = F'(y) - 2xF'(xy) = \frac{2(2y+2-xy)}{y(y+2)(xy+2)}.}$$

15. Point critique.

$\nabla H(x,y) = 0 \iff xy = 2x+2 = 2y+2$. Donc $x = y$, puis $x^2 - 2x - 2 = 0$, soit $x = 1 \pm \sqrt{3}$; seule $1+\sqrt{3}$ appartient à $]1,+\infty[$.

$$\boxed{(x_0, y_0) = (1+\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3}).}$$

16. Extrémum local ?

La hessienne en (x_0,y_0) est $\begin{pmatrix} r & s \\ s & r \end{pmatrix}$ avec $r \approx -1{,}2 \cdot 10^{-2}$ et $s \approx -4{,}5 \cdot 10^{-2}$. Les vecteurs $\binom{1}{1}$ et $\binom{1}{-1}$ sont des vecteurs propres, de valeurs propres $r+s \approx -5{,}7 \cdot 10^{-2} < 0$ et $r - s \approx 3{,}3 \cdot 10^{-2} > 0$. Les valeurs propres sont de signes opposés : (x_0,y_0) est un point col. Comme un extrémum local sur l'ouvert $]1,+\infty[^2$ est nécessairement un point critique :

$$\boxed{H \text{ n'admet aucun extrémum local sur }]1,+\infty[^2.}$$

17. Intégrale de $T(f)$.

Notons $K = T(f)$, de classe $\mathcal{C}^1$. On intègre par parties sur $[A,B]$, avec $x \mapsto x$ et K :

$$\int_A^B K(x)\,dx = BK(B) - AK(A) - \frac{1}{2}\int_A^B x\big(f(x+1) - f(x-1)\big)dx.$$

Par changements de variable affines, $\int_A^B xf(x+1)\,dx = \int_{A+1}^{B+1}(u-1)f(u)\,du$ et $\int_A^B xf(x-1)\,dx = \int_{A-1}^{B-1}(u+1)f(u)\,du$. Par la relation de Chasles,

$$\int_{A+1}^{B+1} uf - \int_{A-1}^{B-1} uf = \int_{B-1}^{B+1} uf - \int_{A-1}^{A+1} uf,$$

et $BK(B) = \frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1} Bf$, $AK(A) = \frac{1}{2}\int_{A-1}^{A+1} Af$. En regroupant :

$$\boxed{\begin{aligned}\int_A^B T(f) = \frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1}(B-x)f(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_{A-1}^{A+1}(A-x)f(x)\,dx \\ +\frac{1}{2}\int_{A+1}^{B+1} f + \frac{1}{2}\int_{A-1}^{B-1} f.\end{aligned}}$$

18. Majoration.

Sur $[B-1, B+1]$, $|B-x| \leqslant 1$ et $f \geqslant 0$, donc :

$$\boxed{\left|\frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1}(B-x)f(x)\,dx\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1} f = T(f)(B).}$$

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1$ converge, 5 donne $T(f)(B) \to 0$ en $\pm\infty$; par encadrement :

$$\boxed{\lim_{B\to+\infty}\frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1}(B-x)f(x)\,dx = 0.}$$

19. $T(f)$ est une densité.

$T(f)$ est continue et positive. Dans 17, on fait tendre B vers $+\infty$ et A vers $-\infty$: les deux premiers termes tendent vers 0 (18, et de même en $-\infty$), et les deux derniers vers $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f = \frac{1}{2}$. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} T(f)$ converge et vaut 1.

$$\boxed{T(f) \text{ est une densité de probabilité.}}$$

Problème 2

Problème 2 – Parties I à III – L'endomorphisme $\Phi_A : M \mapsto AM - MA$

Questions 1 à 10.

Corrigé – Problème 2.

1. Linéarité.

$\Phi_A(\alpha M + N) = A(\alpha M + N) - (\alpha M + N)A = \alpha\Phi_A(M) + \Phi_A(N)$, et $\Phi_A(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\Phi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})).}$$

2. Injectivité, surjectivité.

$\Phi_A(I_n) = A - A = 0$ avec $I_n \neq 0$: Φ_A n'est pas injectif. Comme c'est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, il n'est pas non plus surjectif (théorème du rang).

$$\boxed{\Phi_A(I_n) = 0\ ;\ \Phi_A \text{ n'est ni injectif, ni surjectif.}}$$

3. La matrice A.

A est triangulaire, de valeurs propres 1 et 3, distinctes, en dimension 2.

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable,} \qquad \mathrm{Sp}(A) = \{1, 3\}.}$$

4. Matrice de Φ_A.

Calcul direct : $\Phi_A(E_{1,1}) = -E_{1,2}$, $\Phi_A(E_{1,2}) = -2E_{1,2}$, $\Phi_A(E_{2,1}) = E_{1,1} + 2E_{2,1} - E_{2,2}$,

$\Phi_A(E_{2,2}) = E_{1,2}$.

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi_A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{rg} = 2}$$

(colonnes 1, 2, 4 colinéaires, la troisième non colinéaire à elles).

5. Éléments propres de Φ_A.

- $\dim \mathrm{Ker}\, \Phi_A = 4 - 2 = 2$; par exemple $\mathrm{Ker}\, \Phi_A = \mathrm{Vect}(I_2, A)$.
- $\Phi_A(E_{1,2}) = -2E_{1,2}$.
- On vérifie que $N = E_{1,1} - \frac{1}{2}E_{1,2} + 2E_{2,1} - E_{2,2}$ satisfait $\Phi_A(N) = 2N$ (avec la matrice ci-dessus : $M(1, -\frac{1}{2}, 2, -1)^T = (2, -1, 4, -2)^T$).

La somme des dimensions des sous-espaces propres associés à $0, -2, 2$ vaut au moins $2 + 1 + 1 = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; elle vaut donc exactement 4, et il n'y a pas d'autre valeur propre.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\Phi_A) = \{-2, 0, 2\}, \quad \Phi_A \text{ est diagonalisable.}}$$

6. Transposée.

Si $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale, alors ${}^tA = ({}^tP)^{-1} D\, {}^tP$.

$$\boxed{{}^tA \text{ est diagonalisable, semblable à } D : \mathrm{Sp}({}^tA) = \mathrm{Sp}(A).}$$

7. Vecteurs propres de Φ_A.

$AX = \lambda X$ et ${}^tAY = \mu Y$, d'où ${}^tYA = \mu\, {}^tY$. Alors $\Phi_A(X\, {}^tY) = \lambda X\, {}^tY - \mu X\, {}^tY$. De plus $X\, {}^tY \neq 0$: son coefficient (i, j) vaut $x_i y_j$, non nul si $x_i \neq 0$ et $y_j \neq 0$.

$$\boxed{\Phi_A(X\, {}^tY) = (\lambda - \mu) X\, {}^tY, \quad X\, {}^tY \neq 0.}$$

8. La base $\mathcal{F}$.

Écrivons $V_i = \sum_k a_k X_k$ et $V_j = \sum_l b_l Y_l$. Alors $V_i\, {}^tV_j = \sum_{k,l} a_k b_l X_k\, {}^tY_l \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. Donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ contient la base $(E_{i,j})$, et $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\mathcal{F}$ est génératrice et compte $n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ éléments.

$$\boxed{\mathcal{F} \text{ est une base de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

9. Diagonalisabilité.

On choisit (X_i) base de vecteurs propres de A et (Y_j) base de vecteurs propres de ${}^tA$ (question 6). Par 7 et 8, $\mathcal{F}$ est une base de vecteurs propres de Φ_A.

$$\boxed{\Phi_A \text{ est diagonalisable.}}$$

10. Spectre de Φ_A.

Dans la base $\mathcal{F}$, la matrice de Φ_A est diagonale, de coefficients $\lambda_i - \mu_j$ (λ_i, μ_j valeurs propres de A et de ${}^tA$, et $\mathrm{Sp}({}^tA) = \mathrm{Sp}(A)$). Ses valeurs propres sont exactement ces coefficients. Réciproquement, chaque différence $\lambda - \mu$ est obtenue par 7.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\Phi_A) = \{\lambda - \mu,\ (\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}(A)^2\}.}$$

Problème 2 – Parties IV et V – Vecteurs propres nilpotents, cas symétrique

Questions 11 à 19.

Corrigé – Problème 2.

11. Puissances de T.

Pour tous M, N, $\Phi_A(MN) = AMN - MNA = (AM - MA)N + M(AN - NA) = \Phi_A(M)N + M\Phi_A(N)$. Récurrence : $\Phi_A(T^0) = \Phi_A(I_n) = 0$. Si $\Phi_A(T^k) = k\lambda T^k$, alors

$$\Phi_A(T^{k+1}) = \Phi_A(T^k)T + T^k\Phi_A(T) = k\lambda T^{k+1} + \lambda T^{k+1}.$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \Phi_A(T^k) = \lambda k T^k.}$$

12. Nilpotence.

Supposons $T^k \neq 0$ pour tout $k \in \{0, \dots, n^2\}$. Ce sont alors des vecteurs propres de Φ_A associés aux $n^2 + 1$ valeurs propres deux à deux distinctes $0, \lambda, 2\lambda, \dots, n^2\lambda$ (car $\lambda \neq 0$). La famille est donc libre, de cardinal $n^2 + 1 > \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: c'est absurde. Comme $T^0 = I_n \neq 0$:

$$\boxed{\exists q \in [\![1, n^2]\!], \quad T^q = 0.}$$

13. Majoration de p.

$T^{p-1} \neq 0$, donc l'une de ses colonnes $T^{p-1}V_j$ est non nulle ; on prend $X = V_j$. Supposons $\sum_{k=0}^{p-1} c_k T^k X = 0$. En multipliant par T^{p-1}, et puisque $T^m = 0$ pour $m \geqslant p$, il reste $c_0 T^{p-1} X = 0$, donc $c_0 = 0$. En multipliant ensuite par T^{p-2}, on obtient $c_1 = 0$, et ainsi de suite. La famille $(X, \dots, T^{p-1}X)$ est donc libre, avec p vecteurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de dimension n.

$$\boxed{(X, TX, \dots, T^{p-1}X) \text{ est libre, donc } p \leqslant n.}$$

14. Produit scalaire.

L'application est bilinéaire et symétrique (immédiat), et $(M \mid M) = \sum m_{i,j}^2 \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $M = 0$.

$$\boxed{(\cdot \mid \cdot) \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

15. Expression à l'aide de I_n.

Pour toute matrice Z, $(Z \mid I_n) = \sum_i z_{i,i}$. Or $(M\,{}^tN)_{i,i} = \sum_j m_{i,j}n_{i,j}$, donc

$$\boxed{(M\,{}^tN \mid I_n) = \sum_i \sum_j m_{i,j}n_{i,j} = (M \mid N).}$$

16. Orthonormalité des colonnes.

${}^tC_iC_j$ est le coefficient (i,j) de ${}^tPP = I_n$.

$$\boxed{{}^tC_iC_j = \delta_{i,j}.}$$

17. Coefficients diagonaux.

$(C_i\,{}^tC_j)_{k,k} = (C_i)_k(C_j)_k$, d'où $(C_i\,{}^tC_j \mid I_n) = \sum_k (C_i)_k(C_j)_k = {}^tC_iC_j$.

$$\boxed{(C_i\,{}^tC_j \mid I_n) = \delta_{i,j}.}$$

18. Produits scalaires dans $\mathcal{G}$.

Par 15, 16 et 17 :

$$(C_i\,{}^tC_j \mid C_k\,{}^tC_\ell) = (C_i\,{}^tC_j\,C_\ell\,{}^tC_k \mid I_n) = \delta_{j,\ell}\,(C_i\,{}^tC_k \mid I_n).$$

$$\boxed{(C_i\,{}^tC_j \mid C_k\,{}^tC_\ell) = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}.}$$

19. La base $\mathcal{G}$.

Par 18, $\mathcal{G}$ est une famille orthonormée (donc libre) de n^2 vecteurs : c'est une base orthonormée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $AP = PD$ avec $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, on a $AC_i = d_iC_i$ et ${}^tA = A$. Par 7, $\Phi_A(C_i\,{}^tC_j) = (d_i - d_j)C_i\,{}^tC_j$.

$$\boxed{\mathcal{G} \text{ est une base orthonormée de vecteurs propres de } \Phi_A.}$$