

Année : 2014

École : EML

Option : Mathématiques approfondies

Sommaire

Problème 1 1

Thèmes abordés : Fonctions d'une variable ; fonctions de plusieurs variables ; intégrales ; intégrales généralisées ; variables à densité ; applications linéaires 1

Problème 2 4

Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; réduction ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire 4

Problème 1

Thèmes abordés : Fonctions d'une variable ; fonctions de plusieurs variables ; intégrales ; intégrales généralisées ; variables à densité ; applications linéaires

On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues, E_1 le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 . On remarquera que E_1 est inclus dans E .

On note, pour tout élément f de E , $T(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$T(f)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt.$$

Partie I — Propriétés générales de T

- 1) Établir que, pour tout élément f de E , $T(f)$ appartient à E_1 et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(T(f))'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)).$$

On note $T : E \longrightarrow E$ l'application qui, à f , associe $T(f)$.

- 2) Montrer que T est un endomorphisme de E .
- 3) Est-ce que T est surjectif ?
- 4) Soit $f \in E$. Montrer que, si f est paire (respectivement impaire), alors $T(f)$ est paire (respectivement impaire).

À cet effet, on pourra utiliser le changement de variable $u = -t$ dans une intégrale.

- 5) Soit $f \in E$. Montrer que, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge, alors $T(f)(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.
- 6) On note $s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application qui, à tout $t \in \mathbb{R}$, associe $s(t) = \sin(\pi t)$. Calculer $T(s)$. Est-ce que T est injectif ?

Partie II — Premier exemple

On note, pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto f_a(t) = e^{at}.$$

- 7) Calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $T(f_a)(x)$.

On note $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \longmapsto \varphi(a)$, où

$$\varphi(a) = \begin{cases} \frac{e^a - e^{-a}}{2a} & \text{si } a \neq 0, \\ 1 & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

8) Établir :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad T(f_a) = \varphi(a)f_a.$$

9) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\varphi'(a)$.

Étudier, selon $a \in \mathbb{R}$, le signe de $e^a(a-1) + e^{-a}(a+1)$.

En déduire les variations de φ et tracer l'allure de sa représentation graphique.

10) En déduire que, pour tout $\lambda \in [1, +\infty[$, il existe $f \in E \setminus \{0\}$ tel que :

$$T(f) = \lambda f.$$

Partie III — Deuxième exemple

On note :

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto h(t) = \frac{1}{|t| + 1}.$$

11) Vérifier $h \in E$ et calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T(h)(x)$.

À cet effet, on remarquera que h est paire, et on distinguera les cas $0 \leq x \leq 1$ et $1 < x$.

12) Étudier les variations de $T(h)$ et tracer l'allure de sa représentation graphique.

On précisera les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1. On donne $\ln 2 \approx 0,69 \dots$, $\ln 3 \approx 1,10 \dots$

13) Est-ce que la réciproque du résultat obtenu dans la question 5 est vraie, c'est-à-dire, est-ce que, pour tout élément f de E , si $T(f)(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$, alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge ?

Partie IV — Recherche d'extrémums locaux pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note :

$$F :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto F(x) = \ln(x+2) - \ln(x),$$

de sorte que $F(x) = 2T(h)(x)$, où h a été définie dans la partie III, et on note :

$$H :]1, +\infty[^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto H(x, y) = F(x) + F(y) - 2F(xy).$$

14) Montrer que H est de classe C^1 sur $]1, +\infty[^2$ et calculer les dérivées partielles premières de H en tout $(x, y) \in]1, +\infty[^2$.

15) Établir que H admet un point critique et un seul, que l'on calculera.

On note (x_0, y_0) les coordonnées de ce point critique.

16) On admet que H est de classe C^2 sur $]1, +\infty[^2$ et que

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x_0, y_0) \approx -1,2 \cdot 10^{-2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \approx -4,5 \cdot 10^{-2}.$$

Est-ce que H admet un extrémum local sur $]1, +\infty[^2$?

Partie V — Transformée d'une densité

Soit $f \in E$. On suppose, dans cette partie, que f est une densité.

17) Montrer, pour tout (A, B) de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \int_A^B T(f)(x) \, dx &= \frac{1}{2} \int_{B-1}^{B+1} (B-x)f(x) \, dx - \frac{1}{2} \int_{A-1}^{A+1} (A-x)f(x) \, dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{A+1}^{B+1} f(x) \, dx + \frac{1}{2} \int_{A-1}^{B-1} f(x) \, dx. \end{aligned}$$

18) Montrer :

$$\forall B \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{1}{2} \int_{B-1}^{B+1} (B-x)f(x) \, dx \right| \leq T(f)(B).$$

En déduire la limite de $\frac{1}{2} \int_{B-1}^{B+1} (B-x)f(x) \, dx$ lorsque B tend vers $+\infty$.

19) Établir que $T(f)$ est aussi une densité.

Problème 2

Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; réduction ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note V_i la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la i -ième ligne qui est égal à 1. On admet que la famille $(V_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour tout (i, j) de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note $E_{i,j} = V_i {}^t V_j$. Ainsi, pour tout (i, j) de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, la matrice $E_{i,j}$ est la matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui à l'intersection de la i -ième ligne et de la j -ième colonne qui est égal à 1. On admet que la famille $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout λ de $\mathbb{R}$, $A \neq \lambda I_n$.

On considère l'application Φ_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi_A(M) = AM - MA.$$

Partie I — Quelques généralités

- 1) Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 2) Calculer $\Phi_A(I_n)$. L'endomorphisme Φ_A est-il injectif ? surjectif ?

Partie II — Étude d'un cas particulier

On suppose, dans cette partie seulement, que $n = 2$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 3) Justifier que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donner les valeurs propres de A .
On note $\mathcal{B}$ la base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constituée des quatre matrices suivantes :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 4) Écrire la matrice de Φ_A dans la base $\mathcal{B}$, puis calculer le rang de cette matrice.
- 5) Déterminer les valeurs propres de Φ_A et montrer que Φ_A est diagonalisable.

Partie III — Étude du cas où A est diagonalisable

On suppose, dans cette partie seulement, que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6) Montrer que tA est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que A et tA ont les mêmes valeurs propres.

7) Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que X (respectivement Y) est un vecteur propre de A (respectivement de tA).

Montrer que $X {}^tY$ est un vecteur propre de Φ_A .

8) Soient $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{F}$ la famille

$$\mathcal{F} = (X_i {}^tY_j)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}.$$

Montrer que, pour tout (i, j) de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, $V_i {}^tV_j$ appartient au sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par $\mathcal{F}$, et en déduire que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

9) Établir que Φ_A est diagonalisable.

10) Montrer que l'ensemble des valeurs propres de Φ_A est l'ensemble des différences $\lambda - \mu$ lorsque λ et μ décrivent les valeurs propres de A .

Partie IV — Étude d'un sous-espace propre de Φ_A associé à une valeur propre non nulle

Soient λ une valeur propre non nulle de Φ_A et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé ; on a alors :

$$\Phi_A(T) = \lambda T \quad \text{et} \quad T \neq 0.$$

11) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \Phi_A(T^k) = \lambda k T^k.$$

12) En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il existe un entier q de $\mathbb{N}^*$ tel que :

$$T^q = 0 \quad \text{et} \quad q \leq n^2.$$

On note p l'entier de $\mathbb{N}^*$ tel que $T^p = 0$ et $T^{p-1} \neq 0$.

13) Justifier qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $T^{p-1}X \neq 0$.

Montrer que la famille $(X, TX, \dots, T^{p-1}X)$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et en déduire : $p \leq n$.

Partie V — Étude du cas où A est symétrique

On suppose, dans cette partie seulement, que la matrice A est symétrique ; il existe donc une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale telle que $P^{-1}AP$ est diagonale. On note $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes de P .

Pour toutes matrices $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ et $N = (n_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit :

$$(M \mid N) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} m_{i,j} n_{i,j}.$$

14) Montrer que l'application $(\cdot \mid \cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

15) Montrer :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad (M \mid N) = ({}^t M N \mid I_n).$$

16) Pour tout (i, j) de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, calculer ${}^t C_i C_j$.

17) Pour tout (i, j) de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, déterminer les coefficients diagonaux de la matrice $C_i {}^t C_j$ et en déduire la valeur de $(C_i {}^t C_j \mid I_n)$.

18) Pour tout (i, j, k, ℓ) de $\llbracket 1, n \rrbracket^4$, calculer

$$(C_i {}^t C_j \mid C_k {}^t C_\ell).$$

19) On considère la famille

$$\mathcal{G} = (C_i {}^t C_j)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$$

de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $\mathcal{G}$ est une base orthonormée pour le produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{G}$ est constituée de vecteurs propres de Φ_A .