ESSEC

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2014

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Lemme utilisé plusieurs fois. Pour x, y réels, la matrice $B = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ vérifie ${}^tBB = (x^2+y^2)I_2$; elle est donc inversible dès que $y \neq 0$. En particulier, si $\sin\theta \neq 0$ et $\rho > 0$, alors $\rho R_\theta - \alpha I_2$ est inversible pour tout réel α : ρR_θ n'a pas de valeur propre réelle.

Partie I – Matrices normales d'ordre 2

Partie I – Caractérisation en dimension 2

Questions 1 à 3.

Corrigé – Partie I.

1. Caractérisation.

On calcule

$$ {}^tAA = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}, \qquad A{}^tA = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}. $$

A est donc normale si et seulement si $b^2 = c^2$ et $ab+cd = ac+bd$.

- Si $b = c$: A est symétrique.
- Si $c = -b \neq 0$: la seconde condition devient $2b(a-d) = 0$, donc $d = a$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Avec $\rho = \sqrt{a^2+b^2} > 0$ et θ tel que $\cos\theta = \frac{a}{\rho}$, $\sin\theta = \frac{b}{\rho}$, on obtient $A = \rho R_\theta$.

Réciproquement, une matrice symétrique est normale, et ${}^t(\rho R_\theta)(\rho R_\theta) = \rho^2 I_2 = (\rho R_\theta){}^t(\rho R_\theta)$.

$$ \boxed{A \text{ normale } \iff A \text{ symétrique ou } A = \rho R_\theta \ (\rho > 0,\ \theta \in \mathbb{R}).} $$

2. ${}^tA$ polynôme en A.

Si A est symétrique, $P = X$ convient. Si $A = \rho R_\theta$, alors ${}^tA + A = 2\rho\cos\theta\, I_2$, d'où ${}^tA = 2\rho\cos\theta\, I_2 - A$.

$$ \boxed{P = X \text{ ou } P = 2\rho\cos\theta - X.} $$

3. Normales vérifiant $A^2 - A + I_2 = 0$.

- Une matrice symétrique est diagonalisable à valeurs propres réelles, racines de $X^2 - X + 1$, qui n'en a pas : ce cas est impossible.

- Si $A = \rho R_\theta$, on a $A^2 = \rho^2 R_{2\theta}$. L'égalité $A^2 - A + I_2 = 0$ donne

$$\rho^2 \cos 2\theta - \rho \cos\theta + 1 = 0 \quad \text{et} \quad \rho^2 \sin 2\theta - \rho \sin\theta = \rho \sin\theta(2\rho\cos\theta - 1) = 0.$$

Comme $\sin\theta \neq 0$ (sinon A serait symétrique), on a $2\rho\cos\theta = 1$. La première équation s'écrit $2\rho^2\cos^2\theta - \rho^2 - \rho\cos\theta + 1 = 0$, c'est-à-dire $\frac{1}{2} - \rho^2 - \frac{1}{2} + 1 = 0$, soit $\rho = 1$ et $\cos\theta = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{A = R_{\pi/3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = R_{-\pi/3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.}$$

Partie II – L'endomorphisme adjoint

Partie II – Propriétés de f^*

Questions 4 à 8.

Corrigé – Partie II.

4. Propriétés élémentaires.

a) $(f^*)^*$ est représenté par ${}^t({}^tA) = A$.

$$\boxed{(f^*)^* = f.}$$

b) $(f^{-1})^*$ est représenté par ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

$$\boxed{(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}.}$$

5. Caractérisation de f^*.

a) $f(e_i) = \sum_k a_{k,i} e_k$.

$$\boxed{\langle f(e_i), e_j\rangle = a_{j,i}.}$$

b)

$$\boxed{\langle f(x), y\rangle = {}^t(AX)Y = {}^tX\,{}^tAY = \langle x, f^*(y)\rangle.}$$

c) Si g vérifie la même propriété, alors $\langle x, g(y) - f^*(y)\rangle = 0$ pour tout x ; avec $x = g(y) - f^*(y)$, on obtient $g(y) = f^*(y)$.

$$\boxed{f^* \text{ est l'unique endomorphisme vérifiant } \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle.}$$

6. Conservation de la norme.

Par 5.b) appliqué à f et à f^* (avec $(f^*)^* = f$) :

$$\|f(x)\|^2 = \langle x, f^*f(x)\rangle = \langle x, ff^*(x)\rangle = \langle f^*(x), f^*(x)\rangle.$$

$$\boxed{\|f(x)\| = \|f^*(x)\|.}$$

7. Réciproque.

En développant $\|g(x+y)\|^2 = \|g^*(x+y)\|^2$ et en simplifiant à l'aide de l'hypothèse appliquée à x et à y, on obtient $\langle g(x), g(y)\rangle = \langle g^*(x), g^*(y)\rangle$. Par 5.b), cela s'écrit $\langle x, g^*g(y)\rangle = \langle x, gg^*(y)\rangle$ pour tous x, y, donc $g^*g(y) = gg^*(y)$ (cf. 5.c).

$$\boxed{g^* \circ g = g \circ g^* : g \text{ est normal.}}$$

8. Changement de base orthonormée.

Si P est la matrice de passage (orthogonale) vers une base orthonormée, la matrice de f y est $M = {}^tPAP$. Alors

$${}^tMM = {}^tP\,{}^tAA\,P = {}^tP\,A\,{}^tA\,P = M\,{}^tM.$$

$$\boxed{M \text{ est normale.}}$$

Partie III – Matrices normales et polynômes annulateurs

Partie III – Nilpotence et polynôme π_A

Questions 9 à 14.

Corrigé – Partie III.

9. Normale nilpotente.

A et ${}^tA$ commutent, donc $S^p = ({}^tA)^pA^p = 0$. S est symétrique réelle, donc diagonalisable (théorème spectral). Ses valeurs propres μ vérifient $\mu^p = 0$, donc $\mu = 0$, et S, semblable à la matrice nulle, est nulle. Enfin $\|AX\|^2 = {}^tX\,SX = 0$ pour tout X.

$$\boxed{S^p = 0, \qquad S = 0, \qquad A = 0.}$$

10. Généralisation.

$B = P(A)$ est normale : ${}^tB = P({}^tA)$ commute avec $P(A)$ puisque A et ${}^tA$ commutent. Comme $B^q = 0$, la question 9 donne :

$$\boxed{P(A) = 0.}$$

11. Exemple.

${}^tM = M^2 + M - I_n$ est un polynôme en M, donc commute avec M : M est normale. En transposant l'égalité, ${}^tM^2 + {}^tM - M = I_n$, puis en remplaçant ${}^tM$:

$$(M^2 + M - I_n)^2 + (M^2 + M - I_n) - M - I_n = M^4 + 2M^3 - 2M - I_n = 0.$$

$$\boxed{X^4 + 2X^3 - 2X - 1 = (X-1)(X+1)^3 \text{ annule } M.}$$

$(X-1)^3(X+1)^3$ en est un multiple, donc $(M - I_n)^3(M + I_n)^3 = (M^2 - I_n)^3 = 0$. Par 10 avec $P = X^2 - 1$, $M^2 = I_n$. Alors ${}^tM = M^2 + M - I_n = M$.

$$\boxed{(M - I_n)^3(M + I_n)^3 = 0, \qquad M^2 = I_n, \qquad {}^tM = M.}$$

12. D_A **est non vide.**

D'après le résultat admis, $\mathcal{I}_A \neq \emptyset$. Un polynôme constant non nul c n'annule pas A ($cI_n \neq 0$). Les éléments de $\mathcal{I}_A$ sont donc de degré $\geqslant 1$.

$$\boxed{D_A \text{ est une partie non vide de } \mathbb{N}^*.}$$

13. Minimum et racines réelles de π_A**.**

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Soit λ une racine réelle de π_A : $\pi_A = (X-\lambda)R$, où R est un produit de facteurs distincts du type requis (éventuellement $R = 1$), de degré $< \deg \pi_A$. Si l'on avait $R(A) = 0$, alors $R \in \mathcal{I}_A$, ce qui contredit la minimalité. Il existe donc X tel que $Y = R(A)X \neq 0$, et $(A - \lambda I_n)Y = \pi_A(A)X = 0$.

$$\boxed{\text{Toute racine réelle de } \pi_A \text{ est valeur propre de } A.}$$

14. Calcul de π_M**.**

Par 11, $X^2 - 1 = (X-1)(X+1) \in \mathcal{I}_M$, donc π_M divise $X^2 - 1$. Si $\pi_M = X - 1$, alors $M = I_n$; si $\pi_M = X + 1$, alors $M = -I_n$: ces deux cas sont exclus.

$$\boxed{\pi_M = X^2 - 1.}$$

Partie IV – Réduction réelle des matrices normales

Partie IV – Décomposition en blocs

Questions 15 à 19.

Corrigé – Partie IV.

15. Noyaux.

Par 6, $f(x) = 0 \iff f^*(x) = 0$. De plus $f - \lambda\,\mathrm{id}$ est normal : son adjoint $f^* - \lambda\,\mathrm{id}$ (matrice ${}^tA - \lambda I_n$) commute avec lui.

$$\boxed{\ker(f - \lambda\,\mathrm{id}) = \ker(f^* - \lambda\,\mathrm{id}).}$$

16. Stabilité.

f et f^* commutent avec $Q(f)$, donc laissent $F = \ker Q(f)$ stable. Soient $y \in F^\perp$ et $x \in F$:

$$\langle x, f(y)\rangle = \langle f^*(x), y\rangle = 0 \qquad \text{et} \qquad \langle x, f^*(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle = 0,$$

car $f^*(x), f(x) \in F$. Donc $F^\perp$ est stable par f et f^*.

Pour $x, y \in F$, $\langle f_F(x), y\rangle = \langle x, (f^*)_F(y)\rangle$ avec $(f^*)_F(y) \in F$. Par unicité de l'adjoint dans l'espace euclidien F, $(f_F)^* = (f^*)_F$, puis $(f_F)^* f_F = (f^*f)_F = (ff^*)_F = f_F(f_F)^*$. De même sur $F^\perp$.

$$\boxed{F, F^\perp \text{ stables par } f, f^* \ ;\ f_F, f_{F^\perp} \text{ normaux} \ ;\ (f_F)^* = (f^*)_F.}$$

17. Recherche d'un sous-espace stable.

a) Par 13, λ est valeur propre : il existe $e \neq 0$ avec $f(e) = \lambda e$. Par 15, $f^*(e) = \lambda e$.

$$\boxed{\text{Vect}(e) \text{ est non nul et stable par } f \text{ et } f^*.}$$

b) $\pi_A = \prod_j q_j$ avec $s \geqslant 1$ (et $A \neq 0$). Si tous les $q_j(f)$ étaient inversibles, $\pi_A(f) = 0$ serait inversible, ce qui est absurde ($n \geqslant 1$).

$$\boxed{\exists (a,b),\ a^2 - 4b < 0,\ f^2 + af + b\,\mathrm{id} \text{ non inversible.}}$$

c) $G \neq \{0\}$ est stable par f et f^* (16), et $g^* = (f^*)_G$. Donc $h^* = g^* + g = h$: h est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien G.

$$\boxed{h \text{ est diagonalisable (théorème spectral).}}$$

d) On a $h(e) = \mu e$, donc $f^*(e) = \mu e - f(e) \in F$. Vérifions la stabilité :

- $f(e) \in F$, et $f(f(e)) = -af(e) - be \in F$, car $e \in G$;
- $f^*(e) \in F$, et $f^*(f(e)) = f(f^*(e)) = \mu f(e) - f^2(e) \in F$.

Si $f(e)$ était colinéaire à e, soit $f(e) = \alpha e$, on aurait $(\alpha^2 + a\alpha + b)e = 0$ avec $\alpha^2 + a\alpha + b > 0$ (discriminant négatif), ce qui est absurde.

$$\boxed{F = \text{Vect}(e, f(e)) \text{ est stable par } f \text{ et } f^*,\ \dim F = 2.}$$

18. Réduction par blocs.

Récurrence forte sur la dimension de l'espace euclidien, pour les endomorphismes normaux. Les questions 13 à 17 s'appliquent à la matrice d'un endomorphisme normal dans une base orthonormée, qui est normale par 8. Le cas $f = 0$ et la dimension 1 sont immédiats.

Soit f normal non nul. Par 17, il existe F de dimension 1 ou 2, stable par f et f^*. Alors $F^\perp$ est stable par f et f^* (même calcul qu'en 16), et $f_{F^\perp}$ est normal ; on lui applique l'hypothèse de récurrence.

- Si $\dim F = 1$, le bloc est (λ).
- Si $\dim F = 2$ (cas 17.d), la matrice de f_F dans une base orthonormée de F est normale d'ordre 2. Elle n'est pas symétrique : sinon f_F aurait un vecteur propre réel dans $F \subset G$, ce qu'exclut le raisonnement de 17.d. Par 1, elle est de la forme ρR_θ, avec $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

On concatène une base orthonormée de F et une base orthonormée adaptée de $F^\perp$.

$$\boxed{\exists\, \mathcal{C} \text{ orthonormée},\ M_{\mathcal{C}}(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \rho_1 R_{\theta_1}, \ldots, \rho_s R_{\theta_s}).}$$

19. Cas où π_A n'a que des facteurs de degré 1.

Supposons $\pi_A = \prod(X - \lambda_i)$, à racines réelles distinctes. Dans la base $\mathcal{C}$ de 18, chaque bloc B vérifie $\pi_A(B) = 0$. Un bloc ρR_θ avec $\sin\theta \neq 0$ donnerait $\pi_A(B) = \prod(B - \lambda_i I_2)$ inversible par le lemme, ce qui est absurde. La matrice de f dans $\mathcal{C}$ est donc diagonale, et $A = PD\,{}^tP$ avec P orthogonale : A est symétrique.

Réciproquement, si A est symétrique (non nulle), elle est diagonalisable à valeurs propres réelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ distinctes. $\prod(X - \lambda_i)$ l'annule et appartient à $\mathcal{I}_A$; π_A en est un diviseur.

$$\boxed{\pi_A \text{ n'a que des facteurs de degré 1} \iff A \text{ est symétrique.}}$$

Partie V – Étude d'un exemple

Partie V – Le cas $(A+I_n)^7 = A^7 + I_n$

Questions 20 à 23.

Corrigé – Partie V.

20. Factorisation de P.

Par la formule du binôme :

$$P = 7X^6+21X^5+35X^4+35X^3+21X^2+7X = 7X(X^5+3X^4+5X^3+5X^2+3X+1).$$

On vérifie que $(X+1)(X^2+X+1)^2 = (X+1)(X^4+2X^3+3X^2+2X+1)$ redonne le second facteur.

$$\boxed{P = 7X(X+1)(X^2+X+1)^2,}$$

et X^2+X+1 a pour discriminant $-3<0$: il n'a pas de racine réelle.

21. A est orthogonale.

Posons $Q = X(X+1)(X^2+X+1)$. Alors $P = 7Q\,(X^2+X+1)$ divise $7Q^2$, donc $Q(A)^2 = 0$, et $Q(A) = 0$ par 10. Comme A est inversible, $(A+I_n)(A^2+A+I_n) = 0$. Ce polynôme est de la forme requise, donc π_A le divise.

Dans la base $\mathcal{C}$ de 18, chaque bloc B vérifie $(B+I)(B^2+B+I) = 0$.

- Un bloc réel λ vérifie $\lambda = -1$, car $\lambda^2+\lambda+1 > 0$.
- Pour un bloc $B = \rho R_\theta$ avec $\sin\theta \neq 0$, $B+I_2$ est inversible (lemme), donc $B^2+B+I_2 = 0$. Alors $-B$ est normale et vérifie $(-B)^2-(-B)+I_2 = 0$; par 3, $-B = R_{\pm\pi/3}$, donc $\rho = 1$.

Tous les blocs sont orthogonaux, donc $M_{\mathcal{C}}(f)$ est orthogonale, et $A = PM_{\mathcal{C}}(f)\,{}^tP$ aussi.

$$\boxed{\pi_A \mid (X+1)(X^2+X+1) \quad \text{et} \quad A \text{ est orthogonale.}}$$

22. ${}^tA$ polynôme en A.

$(A+I_n)(A^2+A+I_n) = A^3+2A^2+2A+I_n = 0$, donc $A(-A^2-2A-2I_n) = I_n$. Comme A est orthogonale, ${}^tA = A^{-1}$.

$$\boxed{{}^tA = -A^2-2A-2I_n.}$$

23. Calcul de π_A.

π_A est un diviseur unitaire de $(X+1)(X^2+X+1)$, à facteurs de la forme requise.

- $\pi_A = X+1$ donnerait $A = -I_n$, ce qui est exclu.
- $\pi_A = X^2+X+1$ donnerait une matrice sans valeur propre réelle ; dans la base $\mathcal{C}$, tous les blocs seraient de taille 2, et n serait pair : exclu.

$$\boxed{\pi_A = (X+1)(X^2+X+1).}$$

Partie VI – Généralisation

Partie VI – ${}^tA$ est un polynôme en A

Questions 24 à 28. Pour $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on note $q_{\rho,\theta} = X^2 - 2\rho\cos\theta\, X + \rho^2$.

Corrigé – Partie VI.

24. Cas $s = 0$.

Par 19, A est symétrique.

$$\boxed{P = X \text{ convient.}}$$

25. Matrice de f^*.

$\mathcal{C}$ est orthonormée, donc la matrice de f^* est la transposée de celle de f, avec ${}^t(\rho R_\theta) = \rho R_{-\theta}$.

$$\boxed{M_{\mathcal{C}}(f^*) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \rho_1 R_{-\theta_1}, \dots, \rho_s R_{-\theta_s}).}$$

26. Caractérisation.

Les matrices étant diagonales par blocs, $f^* = P(f)$ si et seulement si $P(\lambda) = \lambda$ pour chaque bloc réel, et $P(B) = {}^tB$ pour chaque bloc $B = \rho R_\theta$ ($\sin\theta \neq 0$). Pour un tel bloc, on vérifie (avec $R_\theta^2 = R_{2\theta}$) que $q_{\rho,\theta}(B) = 0$ et que ${}^tB = 2\rho\cos\theta\, I_2 - B$.

- Si $P = (2\rho\cos\theta - X) + q_{\rho,\theta}K$, alors $P(B) = {}^tB$.
- Réciproquement, écrivons $P = q_{\rho,\theta}K + \alpha X + \beta$. Si $P(B) = {}^tB$, alors $(\alpha+1)B + (\beta - 2\rho\cos\theta)I_2 = 0$. Comme B n'est pas multiple de I_2, on a $\alpha = -1$ et $\beta = 2\rho\cos\theta$.

Ces conditions ne dépendent que des facteurs $X - \lambda_i$ et q_j de π_A associés aux blocs.

$$\boxed{f^* = P(f) \iff P(\lambda_i) = \lambda_i\ \forall i, \quad P \equiv 2\rho_j\cos\theta_j - X \pmod{q_j}\ \forall j.}$$

27. Construction de P.

- L_i est le polynôme réel $\frac{\Pi_i}{\Pi_i(\lambda_i)}$, avec $\Pi_i = \Pi/(X - \lambda_i)$. Il vérifie $L_i(\lambda_i) = 1$, $L_i(\lambda_k) = 0$ pour $k \neq i$, et $L_i \equiv 0 \pmod{q_j}$ (car q_j divise Π_i).
- $E_j = U_j\Pi/q_j$ vérifie $E_j \equiv 1 \pmod{q_j}$, $E_j \equiv 0 \pmod{q_k}$ pour $k \neq j$, et $E_j(\lambda_i) = 0$.

Posons

$$P_0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i L_i + \sum_{j=1}^{s} (2\rho_j\cos\theta_j - X)E_j \in \mathbb{R}[X].$$

Alors $P_0(\lambda_i) = \lambda_i$ et $P_0 \equiv (2\rho_j\cos\theta_j - X)\cdot 1 \pmod{q_j}$: par 26, $f^* = P_0(f)$.

Soit P le reste de la division euclidienne de P_0 par π_A. Comme $\pi_A(f) = 0$, on a $P(f) = P_0(f) = f^*$, et $\deg P < \deg\pi_A$. Enfin $\deg\pi_A \leqslant n$: chaque facteur distinct de π_A correspond à au moins un bloc, de taille égale à son degré.

$$\boxed{{}^tA = P(A) \text{ avec } P \in \mathbb{R}[X],\ \deg P \leqslant n-1.}$$

28. Exemple.

Ici $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ et $q = X^2 + X + 1$ ($\rho = 1$, $2\cos\theta = -1$). On cherche $P = (X^2+X+1)(\alpha X+\beta)-1-X$, avec $P(0) = 0$ et $P(-1) = -1$: $\beta - 1 = 0$ et $1-\alpha = -1$, donc $\alpha = 2$ et $\beta = 1$.

$$\boxed{P = (X^2 + X + 1)(2X + 1) - 1 - X = 2X^3 + 3X^2 + 2X, \qquad {}^tA = 2A^3 + 3A^2 + 2A.}$$