

ESSEC

Mathématiques I

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2014

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1	Matrices normales d'ordre 2	2
	<i>Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; réduction.</i>	2
2	L'endomorphisme adjoint	2
	<i>Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire.</i>	2
3	Matrices normales et polynômes annulateurs	3
	<i>Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; réduction.</i>	3
4	Réduction réelle des matrices normales	3
	<i>Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; réduction.</i>	3
5	Étude d'un exemple	4
	<i>Thèmes abordés : Applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; réduction.</i>	4
6	Généralisation	4
	<i>Thèmes abordés : Applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; réduction.</i>	4

Le problème comporte six parties. Il étudie les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$${}^tAA = A{}^tA.$$

Une telle matrice est dite *normale*.

Dans tout le problème, $n \geq 1$, $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel et $\| \cdot \|$ sa norme. Si f est représenté par A dans $\mathcal{B}_0$, on note f^* l'endomorphisme représenté par tA . Si un sous-espace F est stable par f , la restriction de f à F est notée f_F . Enfin,

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

1 Matrices normales d'ordre 2

Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; réduction.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que A est normale si et seulement si elle est symétrique, ou bien s'il existe $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $A = \rho R_\theta$.
2. Si A est normale, montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que ${}^tA = P(A)$.
3. Déterminer les matrices normales $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 - A + I_2 = 0$.

2 L'endomorphisme adjoint

Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire.

Dans cette partie, $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f est l'endomorphisme représenté par A dans $\mathcal{B}_0$.

4. a) Préciser $(f^*)^*$.
b) Si f est inversible, préciser $(f^{-1})^*$.
5. a) Exprimer $\langle f(e_i), e_j \rangle$ à l'aide des coefficients de A .
b) Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$.
c) Montrer que f^* est l'unique endomorphisme vérifiant cette propriété.
6. Montrer que, si f est normal, alors $\|f(x)\| = \|f^*(x)\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
7. Réciproquement, soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\|g(x)\| = \|g^*(x)\|$ pour tout x . En exploitant l'égalité appliquée à $x + y$, montrer que g est normal.
8. Vérifier que, si A est normale, la matrice de f dans toute base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ est normale.

Dans la suite, si E est un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$, on admet l'existence et l'unicité de f^* tel que $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$. Dans toute base orthonormée, sa matrice est la transposée de celle de f .

3 Matrices normales et polynômes annulateurs

Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; réduction.

9. Soit A normale et $p \geq 1$ tel que $A^p = 0$. En posant $S = {}^tAA$, vérifier que $S^p = 0$, puis montrer successivement que $S = 0$ et $A = 0$.
10. Soit A normale. S'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ et $q \geq 1$ tels que $P(A)^q = 0$, montrer que $P(A) = 0$.
11. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M - {}^tM = I_n$. Trouver et factoriser un polynôme annulateur de degré 4 de M . En déduire que $(M - I_n)^3(M + I_n)^3 = 0$, puis montrer que M est symétrique et que $M^2 = I_n$.

Pour adapter la suite au cadre réel, on admet le résultat suivant : toute matrice normale non nulle A admet un polynôme annulateur non nul de la forme

$$c \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i) \prod_{j=1}^s (X^2 + a_j X + b_j),$$

où $c \neq 0$, les λ_i sont réels et distincts, les polynômes quadratiques sont deux à deux distincts et vérifient $a_j^2 - 4b_j < 0$; tous les facteurs sont distincts.

On note $\mathcal{I}_A$ l'ensemble de ces polynômes annulateurs et $D_A = \{\deg Q ; Q \in \mathcal{I}_A\}$.

12. Expliquer pourquoi D_A est une partie non vide de $\mathbb{N}$.
13. Justifier que D_A possède un plus petit élément. Dans la suite, on admet qu'il existe un unique polynôme unitaire $\pi_A \in \mathcal{I}_A$ de degré minimal et que π_A divise tout polynôme annulateur de A . Montrer que toute racine réelle de π_A est une valeur propre de A .
14. Pour $M \neq I_n$ et $M \neq -I_n$ vérifiant les hypothèses de la question 11, déterminer π_M .

4 Réduction réelle des matrices normales

Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; réduction.

Dans cette partie, A est normale et f lui est canoniquement associé.

15. Montrer que $\ker f = \ker f^*$. Plus généralement, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que $\ker(f - \lambda \text{id}) = \ker(f^* - \lambda \text{id})$.
16. Si $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $F = \ker Q(f)$, montrer que F et $F^\perp$ sont stables par f et f^* . Vérifier que f_F et $f_{F^\perp}$ sont normaux et que $(f_F)^* = (f^*)_F$.
17. Recherche d'un sous-espace stable.
 - a) Si π_A possède un facteur $X - \lambda$, montrer qu'il existe $e \neq 0$ tel que $f(e) = \lambda e$, puis que $\text{Vect}(e)$ convient.
 - b) Si π_A n'a pas de facteur de degré 1, justifier l'existence de $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 - 4b < 0$ et $f^2 + af + b \text{id}$ ne soit pas inversible. Poser $G = \ker(f^2 + af + b \text{id})$ et $g = f_G$.
 - c) Vérifier que $h = g + g^*$ est diagonalisable. Soit e un vecteur propre de h .
 - d) Montrer que $F = \text{Vect}(e, f(e))$ est stable par f et f^* et que sa dimension vaut 2.
18. Montrer par récurrence qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{C}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, chaque bloc étant soit un réel λ , soit une matrice ρR_θ avec $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

19. En déduire que les matrices normales dont le polynôme π_A ne possède que des facteurs de degré 1 sont exactement les matrices symétriques.

5 Étude d'un exemple

Thèmes abordés : Applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; réduction.

Dans cette partie, A est normale et inversible et $(A + I_n)^7 = A^7 + I_n$. On pose $P = (X + 1)^7 - X^7 - 1$.

20. Développer puis factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$. Vérifier que $X^2 + X + 1$ n'a pas de racine réelle.
21. En utilisant la question 10, montrer que π_A divise $(X + 1)(X^2 + X + 1)$. À l'aide de la question 18, montrer que A est orthogonale.
22. Montrer que tA s'écrit comme un polynôme en A et donner une expression explicite valable dans tous les cas.
23. On suppose de plus que n est impair et $A \neq -I_n$. Déterminer π_A .

6 Généralisation

Thèmes abordés : Applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; réduction.

Soit A normale non nulle et f l'endomorphisme associé. On désire montrer que tA est un polynôme en A . Dans une base orthonormée $\mathcal{C}$ donnée par la question 18, on regroupe les blocs distincts et l'on écrit

$$\pi_A = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i) \prod_{j=1}^s q_j(X), \quad q_j = X^2 - 2\rho_j \cos(\theta_j)X + \rho_j^2,$$

les facteurs étant deux à deux distincts et les q_j sans racine réelle.

24. Quel polynôme convient lorsque $s = 0$?
25. Préciser la matrice de f^* dans la base $\mathcal{C}$.
26. Montrer que $f^* = P(f)$ si et seulement si

$$P(\lambda_i) = \lambda_i \quad (1 \leq i \leq r), \quad P(X) \equiv 2\rho_j \cos(\theta_j) - X \pmod{q_j(X)} \quad (1 \leq j \leq s).$$

27. On pose $\Pi = \pi_A$. Pour chaque facteur linéaire, poser

$$L_i(X) = \frac{\Pi(X)}{(X - \lambda_i)(\Pi/(X - \lambda_i))(\lambda_i)}.$$

Pour chaque j , on admet qu'il existe $U_j \in \mathbb{R}[X]$, de degré au plus 1, tel que

$$U_j(X) \frac{\Pi(X)}{q_j(X)} \equiv 1 \pmod{q_j(X)},$$

et on pose $E_j = U_j \Pi / q_j$. Construire un polynôme satisfaisant les conditions de la question 26, puis expliquer pourquoi on peut le choisir de degré strictement inférieur à $\deg \pi_A$, donc inférieur ou égal à $n - 1$.

28. Déterminer un tel polynôme lorsque $\pi_A = X(X + 1)(X^2 + X + 1)$.