

HEC Paris – ESSEC

Mathématiques approfondies – Mathématiques I

Corrigé du sujet adapté – 2014

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Préliminaire

Préliminaire – Dénombrement, loi géométrique, intégrales

Questions 1 à 3.

Corrigé – Préliminaire.

1. Dénombrement.

a)

$$\text{card } \mathcal{E}_N = N^N.$$

b) Une application injective de $\llbracket 1, N \rrbracket$ dans lui-même est bijective. Les seules strictement monotones sont l'identité (croissante) et $k \mapsto N + 1 - k$ (décroissante).

$$N! \text{ applications injectives, dont 2 strictement monotones.}$$

2. Partie entière d'une loi exponentielle.

a) $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ presque sûrement, donc $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$, ensemble dénombrable. Pour $n \in \mathbb{N}$, $[Y = n] = \left[\frac{n}{p} \leq X < \frac{n+1}{p} \right]$ est un événement : Y est une variable discrète. On a

$$\mathbb{P}([Y = n]) = e^{-n/p} - e^{-(n+1)/p}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([Y = n]) = \left(e^{-1/p} \right)^n \left(1 - e^{-1/p} \right).$$

b) Posons $q = e^{-1/p} \in]0, 1[$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([Y + 1 = k]) = (1 - q)q^{k-1}$.

$$Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G} \left(1 - e^{-1/p} \right).$$

c) On a $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{q}{1-q} = \frac{1}{e^{1/p} - 1} > 0$. De plus, $e^x > 1 + x$ pour tout $x > 0$ (stricte convexité de l'exponentielle) ; avec $x = \frac{1}{p}$, on obtient $e^{1/p} - 1 > \frac{1}{p}$.

$$0 < \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{e^{1/p} - 1} < p.$$

Les calculs de a) et b) restent valables pour tout réel $p > 0$.

3. Les intégrales $\int_0^1 x^r (\ln x)^s dx$.

- a) La fonction $x \mapsto x^r (\ln x)^s$ est continue sur $]0, 1]$. L'application $u \mapsto e^{-u}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissante, donc bijective de $[0, +\infty[$ sur $]0, 1]$. Le changement de variable $x = e^{-u}$ est donc licite et conserve la nature des intégrales, avec $dx = -e^{-u} du$:

$$\int_0^1 x^r (\ln x)^s dx = (-1)^s \int_0^{+\infty} u^s e^{-(r+1)u} du.$$

Or $u^2 \cdot u^s e^{-(r+1)u} \rightarrow 0$ (croissances comparées), donc l'intégrale de droite converge par comparaison avec $\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2}$.

$$\boxed{\int_0^1 x^r (\ln x)^s dx \text{ converge.}}$$

- b) Avec $v = (r+1)u$ (changement de variable affine) et $\Gamma(s+1) = s!$:

$$\int_0^{+\infty} u^s e^{-(r+1)u} du = \frac{1}{(r+1)^{s+1}} \int_0^{+\infty} v^s e^{-v} dv = \frac{s!}{(r+1)^{s+1}}.$$

$$\boxed{\int_0^1 x^r (\ln x)^s dx = \frac{(-1)^s s!}{(r+1)^{s+1}}.}$$

Partie I – Transport dans une situation aléatoire

Partie I – Fonctions de transport depuis une loi uniforme

Questions 4 à 7. Par le théorème de transfert, $C(T) = \int_0^1 (x - T(x))^2 dx$ sous réserve de convergence.

Corrigé – Partie I.

4. Transport vers une loi de Bernoulli.

- a) $T_a(X)$ ne prend que les valeurs 0 et 1, et $\mathbb{P}([T_a(X) = 1]) = \mathbb{P}([a < X < a+p]) = p$.

$$\boxed{\mathbb{P}([T_a(X) = 1]) = p : \text{les } T_a \text{ sont des fonctions de transport de } X \text{ vers } \mathcal{B}(p).}$$

- b) On développe : $(x - T_a(x))^2 = x^2 - 2xT_a(x) + T_a(x)^2$, avec $T_a^2 = T_a$. Donc

$$C(T_a) = \int_0^1 x^2 dx - 2 \int_a^{a+p} x dx + \int_a^{a+p} dx = \frac{1}{3} - ((a+p)^2 - a^2) + p.$$

$$\boxed{C(T_a) = \frac{1}{3} + p(1-p) - 2ap.}$$

- c) $a \mapsto C(T_a)$ est affine strictement décroissante sur $[0, 1-p]$; son minimum est atteint en $a = 1-p$.

$$\boxed{a = 1-p, \quad C(T_{1-p}) = \frac{1}{3} - p(1-p).}$$

5. Transport vers la loi exponentielle.

- a) Pour $t \geq 0$: $\mathbb{P}([T_1(X) > t]) = \mathbb{P}([X < e^{-t}]) = e^{-t}$ et $\mathbb{P}([T_2(X) > t]) = \mathbb{P}([1 - X < e^{-t}]) = e^{-t}$. Les deux variables sont positives, et ces fonctions de survie sont celles de $\mathcal{E}(1)$.

T_1 et T_2 sont des fonctions de transport de X vers $\mathcal{E}(1)$.

- b) D'après la question 3 : $\int_0^1 \ln x \, dx = -1$, $\int_0^1 x \ln x \, dx = -\frac{1}{4}$ et $\int_0^1 (\ln x)^2 \, dx = 2$; ces intégrales convergent.

- $C(T_1) = \int_0^1 (x + \ln x)^2 \, dx = \frac{1}{3} + 2 \left(-\frac{1}{4}\right) + 2 = \frac{11}{6}$.
- Pour $C(T_2)$, le changement de variable $y = 1 - x$ donne $\int_0^1 (1 - y + \ln y)^2 \, dy = \frac{1}{3} + 2 \left(\int_0^1 \ln y - \int_0^1 y \ln y\right) + 2 = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{5}{6}$.

$$C(T_2) = \frac{5}{6} < C(T_1) = \frac{11}{6}.$$

- c) Soit $\rho \in]0, 1[$, et $p = -\frac{1}{\ln(1-\rho)} > 0$, de sorte que $1 - e^{-1/p} = \rho$. Pour $x \in]0, 1[$, on pose $T(x) = \lfloor pT_1(x) \rfloor + 1 = \lfloor -p \ln x \rfloor + 1$. Comme $T_1(X) \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, la question 2 (valable pour tout $p > 0$) montre que $T(X) \hookrightarrow \mathcal{G}(\rho)$.

Toute loi géométrique $\mathcal{G}(\rho)$ est accessible depuis X .

6. La fonction F_Y^{-1} .

- a) F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f_Y > 0$, donc continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, de limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. Par le théorème de la bijection, et parce que les limites ne sont pas atteintes :

F_Y réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.

- b) F_Y^{-1} est définie sur $]0, 1[= X(\Omega)$ et strictement croissante. Pour $y \in \mathbb{R}$, $[F_Y^{-1}(X) \leq y] = [X \leq F_Y(y)]$, donc $\mathbb{P}([F_Y^{-1}(X) \leq y]) = F_Y(y)$ puisque $F_Y(y) \in]0, 1[$. La fonction de répartition caractérise la loi.

$F_Y^{-1}(X)$ suit la loi de Y .

7. Le cas gaussien.

- a) $|yF_Y(y)\varphi(y)| \leq |y|\varphi(y)$, et $\int |y|\varphi(y) \, dy$ converge (Y admet une espérance) : l'intégrale converge absolument. Pour $A > 0$, les fonctions F_Y et $-\varphi$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-A, A]$, de dérivées φ et $y\varphi(y)$ (car $\varphi'(y) = -y\varphi(y)$). Par intégration par parties :

$$\int_{-A}^A yF_Y(y)\varphi(y) \, dy = [-F_Y\varphi]_{-A}^A + \int_{-A}^A \varphi(y)^2 \, dy.$$

Le crochet tend vers 0. Comme $\varphi(y)^2 = \frac{e^{-y^2}}{2\pi}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \, dy = \sqrt{\pi}$ (densité de $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} yF_Y(y)\varphi(y) \, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

b) On développe : $(y - F_Y)^2 \varphi = y^2 \varphi - 2y F_Y \varphi + F_Y^2 \varphi$. Les trois intégrales convergent :

- $\int y^2 \varphi = \mathbb{E}(Y^2) = 1$;
- la deuxième vaut $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ par a) ;
- $\int F_Y^2 \varphi = \left[\frac{F_Y^3}{3} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{3}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (y - F_Y(y))^2 \varphi(y) dy = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

c) $C(F_Y^{-1}) = \int_0^1 (x - F_Y^{-1}(x))^2 dx$. Le changement de variable $x = F_Y(y)$ (F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$, avec $dx = \varphi(y) dy$) conserve la nature de l'intégrale et donne $\int_{-\infty}^{+\infty} (F_Y(y) - y)^2 \varphi(y) dy$.

$$C(F_Y^{-1}) = \frac{4}{3} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Partie II – Transport optimal dans une situation déterministe

Partie II – Inégalités de réarrangement

Questions 8 à 11.

Corrigé – Partie II.

8. Inégalité (1).

a) $d_k a_k - d_k a_\ell - d_\ell a_k + d_\ell a_\ell = (d_k - d_\ell)(a_k - a_\ell) \geq 0$, car les deux suites sont croissantes (les deux facteurs ont le même signe).

$$d_k a_k \geq d_k a_\ell + d_\ell a_k - d_\ell a_\ell.$$

b) On multiplie par $p_k p_\ell \geq 0$ et on somme sur (k, ℓ) . Comme $\sum_\ell p_\ell = 1$:

$$0 \leq \sum_{k, \ell} p_k p_\ell (d_k - d_\ell)(a_k - a_\ell) = 2 \sum_k p_k d_k a_k - 2 \left(\sum_k p_k d_k \right) \left(\sum_\ell p_\ell a_\ell \right).$$

$$\sum_{k=1}^N p_k d_k a_k \geq \left(\sum_{k=1}^N p_k d_k \right) \left(\sum_{k=1}^N p_k a_k \right).$$

Remarque. La démonstration n'utilise que la monotonie (large) de même sens des suites (d_k) et (a_k) .

9. Inégalité (2).

a) Soit $m = N - n + 1$. On range la sous-liste $(t(n), \dots, t(N))$ par ordre croissant : $u_1 \leq \dots \leq u_m$. Pour $j \in \{1, \dots, m\}$, au moins $m - j + 1$ termes de la liste complète sont $\geq u_j$ (à savoir $u_j, \dots, u_m$). Donc le $(m - j + 1)$ -ième plus grand terme de

la liste complète, c'est-à-dire $\widehat{t}(N - m + j)$, est $\geq u_j$. Comme (a_i) est croissante, $a_{u_j} \leq a_{\widehat{t}(n-1+j)}$; on somme sur j .

$$\sum_{k=n}^N a_{t(k)} \leq \sum_{k=n}^N a_{\widehat{t}(k)}.$$

b) Posons $S_n = \sum_{k=n}^N a_{t(k)}$ et $S_{N+1} = 0$, de sorte que $S_n - S_{n+1} = a_{t(n)}$. Transformation d'Abel, avec $d_0 = 0$:

$$\sum_{n=1}^N (d_n - d_{n-1}) S_n = \sum_{n=1}^N d_n S_n - \sum_{n=1}^N d_{n-1} S_n = \sum_{n=1}^N d_n (S_n - S_{n+1}).$$

$$\sum_{n=1}^N d_n a_{t(n)} = \sum_{n=1}^N \left((d_n - d_{n-1}) \sum_{k=n}^N a_{t(k)} \right).$$

c) On applique b) à t et à $\widehat{t}$.

- Pour $n = 1$, $S_1 = \sum_{k=1}^N a_{t(k)} = \sum_{k=1}^N a_{\widehat{t}(k)}$ (mêmes termes dans un autre ordre).
- Pour $n \geq 2$, $d_n - d_{n-1} > 0$, et a) compare les sommes.

$$\sum_{n=1}^N d_n a_{t(n)} \leq \sum_{n=1}^N d_n a_{\widehat{t}(n)}.$$

(Là encore, il suffit que $(d_n)_{n \geq 1}$ et (a_n) soient croissantes au sens large.)

10. Optimalité de $\widehat{T}$.

Soit T un programme de transport. Il existe une permutation t de $\llbracket 1, N \rrbracket$ telle que $T(d_k) = a_{t(k)}$, et alors $\widehat{t} = \text{id}$. Comme T est bijective, $\sum_k T(d_k)^2 = \sum_k a_k^2$, donc

$$c(T) = \sum_k d_k^2 + \sum_k a_k^2 - 2 \sum_k d_k a_{t(k)} \geq \sum_k d_k^2 + \sum_k a_k^2 - 2 \sum_k d_k a_k = c(\widehat{T})$$

par (2).

$$\forall T, \quad c(T) \geq c(\widehat{T}).$$

11. Interprétation probabiliste.

a) Soient $x_1 < \dots < x_m$ les valeurs de X et $p_k = \mathbb{P}([X = x_k])$. La suite $(h(x_k))$ est croissante au sens large ; (1) s'applique d'après la remarque de 8, avec $d_k = x_k$ et $a_k = h(x_k)$. Le théorème de transfert donne alors :

$$\mathbb{E}(Xh(X)) = \sum p_k x_k h(x_k) \geq \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(h(X)).$$

b) a) s'écrit $\text{Cov}(X, h(X)) \geq 0$.

$$\rho(X, h(X)) \geq 0.$$

c) $\mathbb{E}(h(X)t(X)) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N h(n)t(n)$. On applique (2) avec $d_n = h(n)$ (suite croissante au sens large) et $a_j = j$:

$$\mathbb{E}(h(X)t(X)) = \frac{1}{N} \sum_n h(n)t(n) \leq \frac{1}{N} \sum_n h(n)\widehat{t}(n) = \mathbb{E}(h(X)\widehat{t}(X)).$$

Partie III – Transport optimal dans une situation aléatoire

Partie III – La fonction de transport optimale F_Y^{-1}

Questions 12 à 14.

Corrigé – Partie III.

12. Discrétisation.

- a) Pour $k \in \{1, \dots, N-1\}$, $[X_N = k] = \left[\frac{k-1}{N} \leq U < \frac{k}{N}\right]$, et $[X_N = N] = \left[\frac{N-1}{N} \leq U \leq 1\right]$. Chacun de ces événements a pour probabilité $\frac{1}{N}$.

$$X_N \hookrightarrow \mathcal{U}([1, N]).$$

- b) g' est continue sur le segment $[0, 1]$, donc bornée (théorème des bornes atteintes) ; on pose $\lambda = 1 + \max |g'| > 0$. Si $U < 1$, $X_N = \lfloor 1 + NU \rfloor \in]NU, NU + 1]$, donc $0 < \frac{X_N}{N} - U \leq \frac{1}{N}$; si $U = 1$, $\frac{X_N}{N} = U$. Par l'inégalité des accroissements finis :

$$|Z - Y_N| = \left| g(U) - g\left(\frac{X_N}{N}\right) \right| \leq \lambda \left| U - \frac{X_N}{N} \right| \leq \frac{\lambda}{N}.$$

- c) Z a même loi que Y , qui est à densité, donc $F_Y(y - \frac{\lambda}{N}) = \mathbb{P}([Z < y - \frac{\lambda}{N}])$. Or, par b), si $Z < y - \frac{\lambda}{N}$ alors $Y_N \leq Z + \frac{\lambda}{N} < y$.

$$F_Y\left(y - \frac{\lambda}{N}\right) \leq \mathbb{P}([Y_N < y]).$$

13. Comparaison avec F_Y^{-1} .

- a) L'inégalité de gauche est 12.c) avec $y = \widehat{t}_N(k)$. Pour celle de droite : $Y_N = t_N(X_N)$ avec X_N uniforme, donc $\mathbb{P}([Y_N < \widehat{t}_N(k)]) = \frac{1}{N} \text{card}\{j, t_N(j) < \widehat{t}_N(k)\}$. Or au plus $k-1$ termes de la liste sont strictement inférieurs à son k -ième plus petit terme.

$$F_Y\left(\widehat{t}_N(k) - \frac{\lambda}{N}\right) \leq \mathbb{P}([Y_N < \widehat{t}_N(k)]) \leq \frac{k-1}{N} < \frac{k}{N}.$$

- b) F_Y est continue et strictement croissante de $[\alpha, \beta]$ sur $[0, 1]$; F_Y^{-1} est continue et strictement croissante. Montrons que $\widehat{t}_N(k) - \frac{\lambda}{N} < F_Y^{-1}(\frac{k}{N})$.

- Si $\widehat{t}_N(k) - \frac{\lambda}{N} < \alpha$, c'est clair.
- Sinon, ce réel est dans $[\alpha, \beta]$, et a) donne $F_Y(\widehat{t}_N(k) - \frac{\lambda}{N}) < \frac{k}{N} = F_Y(F_Y^{-1}(\frac{k}{N}))$; on conclut par stricte croissance de F_Y sur $[\alpha, \beta]$.

Soit σ une permutation de $[1, N]$ telle que $\widehat{t}_N(k) = t_N(\sigma(k))$. On applique (2) (avec la remarque de 9) en prenant $d_k = \frac{k}{N}$, $a_j = \widehat{t}_N(j)$ (croissante au sens large) et $t = \sigma^{-1}$. Alors $a_{t(k)} = t_N(k)$ et $\widehat{t} = \text{id}$, d'où

$$\sum_{k=1}^N \frac{k}{N} g\left(\frac{k}{N}\right) = \sum_{k=1}^N \frac{k}{N} t_N(k) \leq \sum_{k=1}^N \frac{k}{N} \widehat{t}_N(k).$$

En combinant avec la première inégalité :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{k}{N} g\left(\frac{k}{N}\right) \leq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{k}{N} \left(F_Y^{-1}\left(\frac{k}{N}\right) + \frac{\lambda}{N} \right).$$

- c) $u \mapsto ug(u)$ et $u \mapsto uF_Y^{-1}(u)$ sont continues sur $[0, 1]$. Par le théorème sur les sommes de Riemann, les deux sommes $\frac{1}{N} \sum \frac{k}{N}(\dots)$ tendent vers les intégrales correspondantes, et $\frac{\lambda}{N} \cdot \frac{1}{N} \sum_k \frac{k}{N} \leq \frac{\lambda}{N} \rightarrow 0$. En passant à la limite :

$$\mathbb{E}(Ug(U)) = \int_0^1 ug(u) du \leq \int_0^1 uF_Y^{-1}(u) du = \mathbb{E}(UF_Y^{-1}(U)).$$

14. Transport optimal.

- a) Pour une fonction de transport T de U vers la loi de Y , $T(U)$ a la loi de Y , donc $\mathbb{E}(T(U)^2) = \mathbb{E}(Y^2)$ et

$$C(T) = \mathbb{E}(U^2) - 2\mathbb{E}(UT(U)) + \mathbb{E}(Y^2).$$

Minimiser $C(T)$ revient à maximiser $\mathbb{E}(UT(U))$. Or F_Y^{-1} (prolongée par $F_Y^{-1}(0) = \alpha$, $F_Y^{-1}(1) = \beta$) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, de dérivée $\frac{1}{f_Y(F_Y^{-1})}$. C'est une fonction de transport de U vers la loi de Y (même calcul qu'en 6.b), et par 13.c), $\mathbb{E}(Ug(U)) \leq \mathbb{E}(UF_Y^{-1}(U))$ pour toute fonction de transport g de classe $\mathcal{C}^1$.

$$T^* = F_Y^{-1}.$$

- b) Pour $y \in [0, 2]$, $\mathbb{P}([Y \leq y]) = \mathbb{P}\left(\left|U - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{y}{4}\right) = \frac{y}{2} : Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 2])$, de densité $\frac{1}{2}$ sur $[\alpha, \beta] = [0, 2]$, et $g(u) = 2u$ convient pour l'hypothèse. Donc $F_Y(y) = \frac{y}{2}$ et $T^*(u) = 2u$, puis $C(T^*) = \mathbb{E}((U - 2U)^2) = \mathbb{E}(U^2)$.

$$T^*(u) = 2u, \quad C(T^*) = \frac{1}{3}.$$