HEC Paris – ESCP Europe

Mathématiques approfondies – Mathématiques II

Corrigé du sujet adapté – 2014

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Partie I – Lois généralisées de Bernoulli

Partie I – La matrice $a{}^t u$ et la loi $\mathcal{B}_k(p)$

Questions 1 à 3.

Corrigé – Partie I.

1. La matrice $M = a{}^t u$.

a) $M_{i,j} = a_i$ pour tous i, j : toutes les colonnes de M sont égales à $a \neq 0$.

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_k & \cdots & a_k \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{rg} M = 1.}$$

b) $Ma = a({}^t u a) = \alpha a$ avec $a \neq 0$.

$$\boxed{Ma = \alpha a : \alpha \text{ est valeur propre de } M.}$$

c) $M^2 = a({}^t u a){}^t u = \alpha M$. Si $MX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, alors $\lambda^2 X = \alpha\lambda X$, donc $\lambda \in \{0, \alpha\}$. Comme $\operatorname{rg} M = 1 < k$, 0 est valeur propre.

$$\boxed{M^2 = \alpha M, \qquad \operatorname{Sp}(M) = \{0, \alpha\}.}$$

d) Par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} M = k - 1$.

- Si $\alpha \neq 0$, la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut au moins $(k-1)+1 = k$, donc M est diagonalisable.
- Si $\alpha = 0$, 0 est la seule valeur propre ; si M était diagonalisable, elle serait nulle, ce qui est faux.

$$\boxed{M \text{ diagonalisable} \iff \alpha \neq 0.}$$

e) $I_k - M$ est inversible si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de M.

$$\boxed{I_k - M \text{ inversible} \iff \alpha \neq 1.}$$

f) Si $\alpha = 1$, alors $M^2 = M$: M est la matrice d'un projecteur. Son image est engendrée par les colonnes, et $MX = a({}^t u X) = 0 \iff \sum x_i = 0$. Le projecteur est orthogonal

si et seulement si Im $\perp$ Ker, c'est-à-dire $a \in (u^\perp)^\perp = \mathrm{Vect}(u)$; avec $\alpha = 1$, cela donne $a = \frac{1}{k}u$.

$$\boxed{\mathrm{Im} = \mathrm{Vect}(a), \quad \mathrm{Ker} = \{x,\ x_1 + \cdots + x_k = 0\} = u^\perp, \quad \text{orthogonal} \iff a = \tfrac{1}{k}u.}$$

2. La loi $\mathcal{B}_k(p)$.

a) On a $[X = e_i] \subset [X_i = 1]$. Comme $\sum_i \mathbb{P}([X = e_i]) = 1$, X prend presque sûrement ses valeurs dans $\{e_1, \dots, e_k\}$; donc $[X_i = 1] \setminus [X = e_i]$ est négligeable et $X_i \in \{0, 1\}$ presque sûrement.

$$\boxed{\mathbb{P}([X_i = 1]) = p_i : X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p_i), \qquad \mathbb{E}(X) = p.}$$

b) $X_1 + X_2$ vaut 1 si $X \in \{e_1, e_2\}$, et 0 sinon (presque sûrement).

$$\boxed{X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(p_1 + p_2).}$$

c) $X_1 X_2 = 0$ presque sûrement, donc $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0 - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$.

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = -p_1 p_2.}$$

d) De même, $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = -p_i p_j$ pour $i \neq j$, et $\mathbb{V}(X_i) = p_i(1 - p_i)$.

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathrm{Diag}(p) - p\,{}^t\!p, \quad \text{de coefficients } p_i\delta_{i,j} - p_i p_j.}$$

3. Rang de $\mathbb{V}(X)$.

a) ${}^t\!u\,\mathrm{Diag}(p) = {}^t\!p$, donc $(I_k - p\,{}^t\!u)\,\mathrm{Diag}(p) = \mathrm{Diag}(p) - p\,{}^t\!p$.

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = (I_k - M(p))\,\mathrm{Diag}(p).}$$

b) $\mathrm{Diag}(p)$ est inversible, donc $\mathrm{rg}\,\mathbb{V}(X) = \mathrm{rg}(I_k - M(p))$. Comme $\sum p_i = 1$, $M(p)$ est la matrice d'un projecteur de rang 1 (question 1). $I_k - M(p)$ est celle du projecteur associé, d'image $\mathrm{Ker}\,M(p)$, de dimension $k - 1$.

$$\boxed{\mathrm{rg}\,\mathbb{V}(X) = k - 1.}$$

c) Soit P la matrice de permutation de coefficients $P_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$; elle est orthogonale, donc ${}^t\!P = P^{-1}$. On a $({}^t\!P\,\mathbb{V}(X)P)_{i,j} = \mathbb{V}(X)_{\sigma(i),\sigma(j)} = p_{\sigma(i)}\delta_{i,j} - p_{\sigma(i)}p_{\sigma(j)}$, qui est le coefficient (i, j) de $\mathrm{Diag}(p_\sigma) - p_\sigma\,{}^t\!p_\sigma = (I_k - p_\sigma\,{}^t\!u)\,\mathrm{Diag}(p_\sigma)$.

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = P\big((I_k - p_\sigma\,{}^t\!u)\,\mathrm{Diag}(p_\sigma)\big)P^{-1}.}$$

d) Soit $m \geqslant 1$ le nombre d'indices tels que $p_i \neq 0$. On choisit σ plaçant ces indices en premier : $p_\sigma = \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $q \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, de coefficients > 0 et de somme 1. La matrice de c) est alors diagonale par blocs, de blocs $\mathrm{Diag}(q) - q\,{}^t\!q$ et 0. Par b) en dimension m (le raisonnement vaut aussi pour $m = 1$, où le bloc est nul) :

$$\boxed{\mathrm{rg}\,\mathbb{V}(X) = \mathrm{card}\{i,\ p_i \neq 0\} - 1.}$$

Partie II – Tirages avec remise dans une population stratifiée

Partie II – Effectifs et temps d'attente

Questions 4 à 6.

Corrigé – Partie II.

4. Les vecteurs $S^{(n)}$.

a) $S_i^{(n)}$ est le nombre d'individus de la catégorie i parmi les n premiers tirés. Pour $s \in \mathbb{N}^k$ de somme n, toute suite de tirages ayant ces effectifs a une probabilité $\prod p_i^{s_i} > 0$.

$$\boxed{N_n = \Big\{ s \in \mathbb{N}^k,\ \sum_{i=1}^{k} s_i = n \Big\}.}$$

b) $S_1^{(n)}$ est une somme de n variables de Bernoulli $\mathcal{B}(p_1)$ indépendantes. $S_1^{(n)} + S_2^{(n)} = \sum_j (X_1^{(j)} + X_2^{(j)})$ est une somme de n variables $\mathcal{B}(p_1+p_2)$ indépendantes (2.b et lemme des coalitions).

$$\boxed{S_1^{(n)} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_1), \qquad S_1^{(n)} + S_2^{(n)} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_1+p_2).}$$

- Si $k = 2$, $S_1^{(n)} + S_2^{(n)} = n$ est constante, donc indépendante de $S_1^{(n)}$.
- Si $k \geqslant 3$, $p_1 + p_2 < 1$ et $\mathbb{P}([S_1^{(n)} = n] \cap [S_1^{(n)} + S_2^{(n)} = 0]) = 0$, alors que $\mathbb{P}([S_1^{(n)} = n])\mathbb{P}([S_1^{(n)} + S_2^{(n)} = 0]) = p_1^n (1-p_1-p_2)^n > 0$: elles ne sont pas indépendantes.

$$\boxed{\text{Elles sont indépendantes si et seulement si } k = 2.}$$

c) Par bilinéarité de la covariance, et parce que $X_a^{(j)}$ et $X_b^{(l)}$ sont indépendantes pour $j \neq l$:

$$\mathrm{Cov}(S_a^{(n)}, S_b^{(n)}) = \sum_{j,l} \mathrm{Cov}(X_a^{(j)}, X_b^{(l)}) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_a^{(j)}, X_b^{(j)}) = n\mathbb{V}(X)_{a,b}.$$

$$\boxed{\mathbb{V}(S^{(n)}) = n\mathbb{V}(X).}$$

5. Variance conditionnelle.

a) Pour toute valeur w de W, $\mathbb{P}_H([W=w]) \leqslant \frac{\mathbb{P}([W=w])}{\mathbb{P}(H)}$. La série $\sum w^2 \mathbb{P}([W=w])$ converge, donc $\sum w^2 \mathbb{P}_H([W=w])$ aussi (comparaison de séries à termes positifs).

$$\boxed{\mathbb{E}(W^2 \mid H) \text{ existe}}$$

(et de même $\mathbb{E}(W \mid H)$, $\mathbb{E}(W \mid \overline{H})$ et $\mathbb{E}(W^2 \mid \overline{H})$).

b) Notons $h = \mathbb{P}(H)$, $m_1 = \mathbb{E}(W \mid H)$ et $m_2 = \mathbb{E}(W \mid \overline{H})$. Par la formule de l'espérance totale, $\mathbb{E}(W) = hm_1 + (1-h)m_2$ et $\mathbb{E}(W^2) = h\mathbb{E}(W^2 \mid H) + (1-h)\mathbb{E}(W^2 \mid \overline{H})$. Donc

$$\mathbb{V}(W) = h\mathbb{V}(W \mid H) + (1-h)\mathbb{V}(W \mid \overline{H}) + hm_1^2 + (1-h)m_2^2 - (hm_1 + (1-h)m_2)^2.$$

Les trois derniers termes valent $h(1-h)(m_1-m_2)^2 \geqslant 0$, et $\mathbb{V}(W \mid \overline{H}) \geqslant 0$.

$$\boxed{\mathbb{V}(W) \geqslant \mathbb{P}(H)\mathbb{V}(W \mid H).}$$

6. Les temps d'attente T_i.

a) L'événement « aucun individu de la catégorie i parmi les n premiers tirages » a pour probabilité $(1-p_i)^n$, qui tend vers 0 ; par limite monotone, $\mathbb{P}([T_i = +\infty]) = 0$. Pour $n \geqslant 1$, $\mathbb{P}([T_i = n]) = (1-p_i)^{n-1}p_i$.

$$\boxed{T_i \hookrightarrow \mathcal{G}(p_i).}$$

b) H_k signifie que les $k-1$ premiers tirages donnent successivement les catégories $1, 2, \ldots, k-1$. Par indépendance, $\mathbb{P}(H_k) = p_1 \cdots p_{k-1}$. Sachant H_k, $T_k - (k-1)$ est le temps d'attente de la catégorie k dans les tirages $k, k+1, \ldots$, qui sont indépendants des $k-1$ premiers.

$$\boxed{\mathbb{P}(H_k) = \prod_{i=1}^{k-1} p_i, \qquad T_k - (k-1) \overset{H_k}{\hookrightarrow} \mathcal{G}(p_k),}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T_k \mid H_k) = k - 1 + \frac{1}{p_k}, \qquad \mathbb{V}(T_k \mid H_k) = \frac{1-p_k}{p_k^2}.}$$

c) $W = \sum v_i T_i$ admet une variance (combinaison linéaire de variables géométriques). Sur H_k, $W = \sum_{i<k} i v_i + v_k T_k$, donc $\mathbb{V}(W \mid H_k) = v_k^2 \mathbb{V}(T_k \mid H_k)$. Comme $0 < \mathbb{P}(H_k) \leqslant 1 - p_k < 1$, la question 5.b) donne :

$$\boxed{\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{k} v_i T_i\right) \geqslant \frac{v_k^2(1-p_k)}{p_k^2} \prod_{i=1}^{k-1} p_i.}$$

d) On renumérote les catégories de sorte que j devienne la dernière ; le raisonnement de c) s'applique à l'identique.

$$\boxed{\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{k} v_i T_i\right) \geqslant \frac{v_j^2(1-p_j)}{p_j^2} \prod_{i \neq j} p_i.}$$

Partie III – Support et rang stochastiques d'un vecteur aléatoire

Partie III – Rang stochastique et rang de $\mathbb{V}(Y)$

Questions 7 à 12. On note $Z = Y - \mathbb{E}(Y)$.

Corrigé – Partie III.

7. Supports vectoriels.

a) $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \in \mathcal{S}(Y)$, donc l'ensemble des dimensions est une partie non vide de $\{0,\dots,k\}$.

$$\boxed{\text{Il admet un plus petit élément } R_s(Y).}$$

b) $R_s(Y) = 0$ si et seulement si $\{0\}$ est un support, c'est-à-dire $\mathbb{P}([Y = \mathbb{E}(Y)]) = 1$.

$$\boxed{R_s(Y) = 0 \iff Y \text{ est presque sûrement constant.}}$$

c) $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel, et $[Z \in F_1 \cap F_2] = [Z \in F_1] \cap [Z \in F_2]$ est une intersection de deux événements presque sûrs, donc presque sûr.

$$\boxed{F_1 \cap F_2 \in \mathcal{S}(Y).}$$

d) Il existe un support de dimension $R_s(Y)$. Si F et F' en sont deux, alors $F \cap F'$ est un support (c), de dimension $\leqslant R_s(Y)$, donc égale à $R_s(Y)$ par minimalité. Comme $F \cap F' \subset F$ et $F \cap F' \subset F'$ ont même dimension, $F = F \cap F' = F'$.

$$\boxed{\text{Le support stochastique existe et est unique.}}$$

8. Réduction de $\mathbb{V}(Y)$.

a) $\sum u_i Y_i$ est une combinaison linéaire de variables admettant une variance, et par bilinéarité de la covariance :

$$\boxed{\mathbb{V}\Big(\sum u_i Y_i\Big) = \sum_{i,j} u_i u_j \operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) = {}^t u\, \mathbb{V}(Y)\, u.}$$

b) $\mathbb{V}(Y)$ est symétrique réelle. D'après le théorème spectral, il existe P orthogonale telle que $\mathbb{V}(Y) = P \operatorname{Diag}(\lambda) {}^t P$. Si $\mathbb{V}(Y)w = \lambda w$ avec $\|w\| = 1$, alors $\lambda = {}^t w \mathbb{V}(Y) w = \mathbb{V}(\sum w_i Y_i) \geqslant 0$. On ordonne les valeurs propres par ordre décroissant (en ajustant P). Il y a unicité : la liste ordonnée des coefficients diagonaux d'une matrice diagonale semblable à $\mathbb{V}(Y)$ est la liste des valeurs propres, chacune répétée selon la dimension de son sous-espace propre.

$$\boxed{\mathbb{V}(Y) \text{ est semblable à } \operatorname{Diag}(\lambda),\ \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k \geqslant 0,\ \lambda \text{ unique.}}$$

c) $\mathbb{E}(\|Z\|^2) = \sum_i \mathbb{V}(Y_i) = \sum_i \mathbb{V}(Y)_{i,i}$. Or $\mathbb{V}(Y)_{i,i} = \sum_j P_{i,j}^2 \lambda_j$ et $\sum_i P_{i,j}^2 = 1$ (les colonnes de P sont unitaires), donc :

$$\boxed{\mathbb{E}(\|Y - \mathbb{E}(Y)\|^2) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j.}$$

9. Distance à un sous-espace.

a) L'ensemble $\{\|Z(\omega) - x\|^2,\ x \in F\}$ est non vide et minoré par 0 : sa borne inférieure existe. Soit $\pi = \sum_j (Z(\omega), f^{(j)}) f^{(j)}$ le projeté orthogonal de $Z(\omega)$ sur F. Pour $x \in F$, par Pythagore, $\|Z - x\|^2 = \|Z - \pi\|^2 + \|\pi - x\|^2 \geqslant \|Z - \pi\|^2$, avec égalité en $x = \pi$. Donc $Q_F(\omega) = \|Z - \pi\|^2 = \|Z\|^2 - \|\pi\|^2$.

$$\boxed{\|Y(\omega) - \mathbb{E}(Y)\|^2 = Q_F(\omega) + \sum_{j=1}^{q} (Y(\omega) - \mathbb{E}(Y), f^{(j)})^2.}$$

b) $(Z, f^{(j)}) = \sum_i f_i^{(j)} Y_i - \mathbb{E}(\sum_i f_i^{(j)} Y_i)$ est centrée, donc son moment d'ordre 2 est sa variance, égale à ${}^t f^{(j)} \mathbb{V}(Y) f^{(j)}$ (8.a). Q_F est positive et majorée par $\|Z\|^2$, donc admet une espérance. Avec 8.c) :

$$\boxed{\mathbb{E}(Q_F) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i - \sum_{j=1}^{q} {}^t f^{(j)} \mathbb{V}(Y) f^{(j)}.}$$

c) Si $F = \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$, alors $Q_F = 0$, donc $\mathbb{E}(Q_F) = 0$.

$$\boxed{\sum_{j=1}^{k} {}^t f^{(j)} \mathbb{V}(Y) f^{(j)} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \text{ pour toute base orthonormale.}}$$

10. Meilleure droite.

a) Soit $(w_1, \dots, w_k)$ une base orthonormale de vecteurs propres ($\mathbb{V}(Y) w_i = \lambda_i w_i$). Si $f = \sum c_i w_i$ avec $\sum c_i^2 = 1$:

$$\boxed{{}^t f \mathbb{V}(Y) f = \sum_i \lambda_i c_i^2 \leqslant \lambda_1,}$$

avec égalité si et seulement si $c_i = 0$ dès que $\lambda_i < \lambda_1$, c'est-à-dire $f \in \mathrm{Ker}(\mathbb{V}(Y) - \lambda_1 I_k)$.

b) Pour $F = \mathrm{Vect}(f)$ avec $\|f\| = 1$, $\mathbb{E}(Q_F) = \sum \lambda_i - {}^t f \mathbb{V}(Y) f \geqslant \sum_{i \geqslant 2} \lambda_i$, avec égalité pour $f = w_1$.

$$\boxed{\inf_F \mathbb{E}(Q_F) = \min_F \mathbb{E}(Q_F) = \sum_{i=2}^{k} \lambda_i.}$$

c) Ici $\mathbb{V}(Y) = \frac{1}{k}\left(I_k - \frac{1}{k} u {}^t u\right)$. Sur $u^\perp$, cette matrice agit comme $\frac{1}{k} I_k$; et $\mathbb{V}(Y) u = 0$.

$$\boxed{\lambda_1 = \cdots = \lambda_{k-1} = \frac{1}{k}, \quad \lambda_k = 0, \qquad \min_F \mathbb{E}(Q_F) = \frac{k-2}{k},}$$

atteint exactement pour les droites F contenues dans l'hyperplan $u^\perp = \{x,\ x_1 + \cdots + x_k = 0\}$ (par le cas d'égalité de a).

11. Rang stochastique et rang de $\mathbb{V}(Y)$.

a) $\mathbb{V}(Y)$ est diagonalisable de rang r, donc $\lambda_1, \dots, \lambda_r > 0$ et $\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_k = 0$, et $F_0 = \mathrm{Vect}(w_1, \dots, w_r)$. Par 9.b) :

$$\boxed{\mathbb{E}(Q_{F_0}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i - \sum_{j=1}^{r} \lambda_j = 0.}$$

Q_{F_0} est une variable discrète positive d'espérance nulle, donc $Q_{F_0} = 0$ presque sûrement. Or $Q_{F_0}(\omega) = 0$ signifie que $Z(\omega)$ est égal à son projeté sur F_0, c'est-à-dire $Z(\omega) \in F_0$.

$$\boxed{F_0 \text{ est un support vectoriel de } Y.}$$

b) $F \subsetneq F_0$, donc $\dim F < \dim F_0$ et l'orthogonal de F dans F_0 n'est pas réduit à $\{0\}$. On y prend un vecteur unitaire.

$$\boxed{\exists f^{(r)} \in F_0 \cap F^\perp,\ \|f^{(r)}\| = 1.}$$

c) Écrivons $f^{(r)} = \sum_{j\leqslant r} c_j w_j$ avec $\sum c_j^2 = 1$. Alors ${}^t f^{(r)}\mathbb{V}(Y) f^{(r)} = \sum_{j\leqslant r} \lambda_j c_j^2 > 0$, car les λ_j $(j \leqslant r)$ sont > 0.
Soit $(f^{(1)}, \dots, f^{(q)})$ une base orthonormale de F et $G = F \oplus \mathrm{Vect}(f^{(r)})$, qui admet la base orthonormale $(f^{(1)}, \dots, f^{(q)}, f^{(r)})$. Par 9.b), $\mathbb{E}(Q_F) = \mathbb{E}(Q_G) + {}^t f^{(r)}\mathbb{V}(Y) f^{(r)} > 0$, car $\mathbb{E}(Q_G) \geqslant 0$. (Si $F = \{0\}$, on a directement $\mathbb{E}(Q_F) = \mathbb{E}(\|Z\|^2) = \sum \lambda_i \geqslant \lambda_1 > 0$.)

$$\boxed{{}^t f^{(r)}\mathbb{V}(Y) f^{(r)} > 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(Q_F) \neq 0.}$$

d) F_0 est un support de dimension r, donc $R_s(Y) \leqslant r$. Soit F un support de dimension $< r$. Alors $F \cap F_0$ est un support (7.c), strictement inclus dans F_0. Donc $Z \in F \cap F_0$ presque sûrement, d'où $Q_{F\cap F_0} = 0$ presque sûrement et $\mathbb{E}(Q_{F\cap F_0}) = 0$, ce qui contredit c).

$$\boxed{R_s(Y) = r = \mathrm{rg}\,\mathbb{V}(Y).}$$

12. Application aux temps d'attente.

a) Les T_i admettent une variance. Soit $v \neq 0$, et j tel que $v_j \neq 0$. D'après 6.d), et comme $0 < p_j < 1$ et tous les $p_i > 0$, ${}^t v\mathbb{V}(T)v = \mathbb{V}(\sum v_i T_i) > 0$. Donc 0 n'est pas valeur propre de $\mathbb{V}(T)$, et $\mathrm{rg}\,\mathbb{V}(T) = k$. Par 11.d) :

$$\boxed{R_s(T) = k.}$$

b) Notons $H = [T_1 = i] \cap [T_2 > i]$: les $i-1$ premiers tirages ne donnent ni la catégorie 1 ni la catégorie 2, et le i-ième donne la catégorie 1. Sur H, $T_1 = i$ et $T_2 = i + T'$, où T' est le temps d'attente de la catégorie 2 dans les tirages $i+1, i+2, \dots$. $T' \hookrightarrow \mathcal{G}(p_2)$ est indépendante de H, donc suit encore la loi $\mathcal{G}(p_2)$ pour $\mathbb{P}_H$.

$$\boxed{\mathbb{E}(T_1T_2 \mid H) = i\,\mathbb{E}(i + T') = i\left(i + \frac{1}{p_2}\right).}$$

c) $T_1T_2 \leqslant \frac{1}{2}(T_1^2 + T_2^2)$ admet une espérance. Les événements $[T_1 = i] \cap [T_2 > i]$ et $[T_2 = j] \cap [T_1 > j]$ $(i, j \in \mathbb{N}^*)$ forment un système complet (presque sûrement, car $T_1 \neq T_2$). Posons $s = p_1 + p_2$ et $\rho = 1 - s$. On a $\mathbb{P}([T_1 = i] \cap [T_2 > i]) = \rho^{i-1}p_1$. Avec $\sum_{i\geqslant 1} i\rho^{i-1} = \frac{1}{s^2}$ et $\sum_{i\geqslant 1} i^2\rho^{i-1} = \frac{1+\rho}{s^3}$, la formule de l'espérance totale donne

$$\mathbb{E}(T_1T_2) = \sum_i p_1\rho^{i-1} i\left(i + \frac{1}{p_2}\right) + \sum_j p_2\rho^{j-1} j\left(j + \frac{1}{p_1}\right) = \frac{(1+\rho)s}{s^3} + \frac{p_1^2 + p_2^2}{p_1p_2s^2}.$$

Le numérateur, ramené au dénominateur commun $p_1p_2s^2$, vaut $(2-s)p_1p_2 + p_1^2 + p_2^2 = s^2 - sp_1p_2$, d'où :

$$\boxed{\mathbb{E}(T_1T_2) = \frac{1}{p_1p_2} - \frac{1}{p_1 + p_2}.}$$

d) Par symétrie, $\mathbb{E}(T_iT_j) = \frac{1}{p_ip_j} - \frac{1}{p_i+p_j}$ pour $i \neq j$. Donc $\mathrm{Cov}(T_i, T_j) = -\frac{1}{p_i+p_j}$, et $\mathbb{V}(T_i) = \frac{1-p_i}{p_i^2}$. Ainsi $\Pi = \mathbb{V}(T)$, qui est de rang k d'après a).

$$\boxed{\Pi = \mathbb{V}(T) \text{ est inversible.}}$$