

ECRICOME

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2015

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Exercice 1

Exercice 1 – Un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$

$$\varphi(P) = P'' - 2XP' \text{ et } \langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt.$$

Corrigé – Exercice 1.

1. Étude de φ .

- a) Si $\deg P \leq n$, alors $\deg P'' \leq n - 2$ et $\deg(XP') \leq n$, donc $\varphi(P) \in E$. La linéarité de la dérivation donne celle de φ .

$$\varphi \in \mathcal{L}(E).$$

- b) Pour $0 \leq k \leq n$, $\varphi(X^k) = k(k-1)X^{k-2} - 2kX^k$. La matrice $M = (m_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ est donc triangulaire supérieure :

$$m_{k,k} = -2k, \quad m_{k-2,k} = k(k-1) \quad (2 \leq k \leq n), \quad m_{i,j} = 0 \text{ sinon.}$$

Par exemple pour $n = 3$: $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$

- c) M est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux $0, -2, \dots, -2n$. Ce sont $n+1$ valeurs deux à deux distinctes en dimension $n+1$.

$$\text{Sp}(\varphi) = \{-2k, 0 \leq k \leq n\} \text{ et } \varphi \text{ est diagonalisable.}$$

2. Le produit scalaire.

- a) $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par croissances comparées, $t^2 P(t)Q(t)e^{-t^2} \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} 0$, donc $|P(t)Q(t)e^{-t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$ pour $|t|$ assez grand. Par comparaison avec l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ (et de même en $-\infty$), l'intégrale converge absolument.

$$\langle P, Q \rangle \text{ est bien défini.}$$

- b) L'application est symétrique, et linéaire à gauche par linéarité de l'intégrale (donc bilinéaire). Elle est positive car $\langle P, P \rangle = \int P^2(t)e^{-t^2} dt \geq 0$.

Définie : si $\langle P, P \rangle = 0$, la fonction $t \mapsto P(t)^2 e^{-t^2}$, continue et positive, d'intégrale nulle, est nulle sur $\mathbb{R}$. Donc P a une infinité de racines, et $P = 0$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

3. φ est symétrique.

Pour $P \in E$, $(P'(t)e^{-t^2})' = (P''(t) - 2tP'(t))e^{-t^2} = \varphi(P)(t)e^{-t^2}$. Soit $A > 0$. Les fonctions $u = P'e^{-t^2}$ et Q sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-A, A]$, de dérivées $\varphi(P)e^{-t^2}$ et Q' . Par intégration par parties :

$$\int_{-A}^A \varphi(P)(t)Q(t)e^{-t^2} dt = \left[P'(t)Q(t)e^{-t^2} \right]_{-A}^A - \int_{-A}^A P'(t)Q'(t)e^{-t^2} dt.$$

Le crochet tend vers 0 (croissances comparées) et la dernière intégrale converge vers $\langle P', Q' \rangle$ (question 2.a). Donc $\langle \varphi(P), Q \rangle = -\langle P', Q' \rangle$, expression symétrique en P et Q .

$\langle \varphi(P), Q \rangle = -\langle P', Q' \rangle = \langle P, \varphi(Q) \rangle$: φ est symétrique.

4. Une base orthogonale de vecteurs propres.

a) Montrons par récurrence sur k que P_k est bien défini, unitaire de degré k , et que $(P_0, \dots, P_k)$ est orthogonale.

- Pour $k = 0$, c'est clair.
- Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $k - 1$. Les P_i ($i < k$) sont non nuls, donc $\langle P_i, P_i \rangle > 0$ et P_k est bien défini. Comme $\deg P_i < k$, P_k est unitaire de degré k . Pour $j < k$, par orthogonalité de $(P_0, \dots, P_{k-1})$:

$$\langle P_k, P_j \rangle = \langle X^k, P_j \rangle - \frac{\langle P_j, X^k \rangle}{\langle P_j, P_j \rangle} \langle P_j, P_j \rangle = 0.$$

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre ; ici elle compte $n + 1 = \dim E$ vecteurs.

$(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$, avec $\deg P_k = k$.

b) D'après 1.a) appliqué à $\mathbb{R}_k[X]$, $\varphi(\mathbb{R}_k[X]) \subset \mathbb{R}_k[X] = \text{Vect}(P_0, \dots, P_k)$. On décompose $\varphi(P_k) = \sum_{j=0}^k c_j P_j$ dans cette base orthogonale, avec $c_j = \frac{\langle \varphi(P_k), P_j \rangle}{\langle P_j, P_j \rangle} = \frac{\langle P_k, \varphi(P_j) \rangle}{\langle P_j, P_j \rangle}$. Pour $j < k$, $\varphi(P_j) \in \text{Vect}(P_0, \dots, P_j)$, qui est orthogonal à P_k ; donc $c_j = 0$. Ainsi $\varphi(P_k) = c_k P_k$ avec $P_k \neq 0$, et en comparant les coefficients dominants, $c_k = -2k$.

$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad \varphi(P_k) = -2k P_k.$

Exercice 2

Exercice 2 – Encadrements de π

$$f(x) = \frac{1}{3}(2 \sin x + \tan x), \quad g(x) = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x} \text{ sur } I =]0, \frac{\pi}{2}[.$$

Corrigé – Exercice 2.

1. Comparaison de f , g et l'identité.

- a) 1 est racine de P , et $P = (X-1)(2X^2-X-1)$. Or 1 est aussi racine de $2X^2-X-1 = (X-1)(2X+1)$.

$$P = (X-1)^2(2X+1).$$

- b) u est dérivable sur I ($\cos$ ne s'y annule pas), et

$$u'(x) = \frac{1}{3} \left(2 \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) - 1 = \frac{2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x + 1}{3 \cos^2 x}. \quad u'(x) = \frac{P(\cos x)}{3 \cos^2 x}.$$

- c) Pour $x \in I$, $\cos x \in]0, 1[$, donc $P(\cos x) = (\cos x - 1)^2(2 \cos x + 1) > 0$.

$$u \text{ est strictement croissante sur } I, \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0.$$

- d) g est dérivable sur I et

$$g'(x) = \frac{3 \cos x(2 + \cos x) + 3 \sin^2 x}{(2 + \cos x)^2} = \frac{6 \cos x + 3}{(2 + \cos x)^2}.$$

$$\text{Donc } v'(x) = \frac{(2 + \cos x)^2 - 6 \cos x - 3}{(2 + \cos x)^2} = \frac{\cos^2 x - 2 \cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}.$$

$$Q = (X-1)^2.$$

- e) Pour $x \in I$, $\cos x \neq 1$, donc $v'(x) > 0$.

$$v \text{ est strictement croissante sur } I, \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} v(x) = 0.$$

- f) u et v se prolongent par continuité en 0 par la valeur 0 et sont strictement croissantes sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. Donc $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$ pour $x \in I$.

$$\forall x \in I, \quad g(x) < x < f(x).$$

2. Un premier encadrement.

- a) Par les formules d'addition :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}, \quad \sin \frac{\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Puis } \tan \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}.$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \quad \tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}.$$

- b) On applique 1.f) en $x = \frac{\pi}{12} \in I$ et on multiplie par 12 : $12g(\frac{\pi}{12}) < \pi < 12f(\frac{\pi}{12})$.

$$\frac{36(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{8 + \sqrt{6} + \sqrt{2}} < \pi < 2(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + 8 - 4\sqrt{3},$$

soit numériquement $3,1415 < \pi < 3,1424$.

3. Méthode itérative.

On note $\theta_n = \frac{\pi}{3 \times 2^n} \in]0, \frac{\pi}{3}]$, de sorte que $\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$.

- a) $\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2\sin^2 \theta$ (et aussi $= 2\cos^2 \theta - 1$). Avec $\theta = \theta_{n+1}$:
 $b_n = 1 - 2a_{n+1}^2 = 2b_{n+1}^2 - 1$. Comme $\theta_{n+1} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $a_{n+1} > 0$ et $b_{n+1} > 0$.

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - b_n}{2}} \quad (*), \quad b_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + b_n}{2}} \quad (**).$$

- b) On applique 1.f) en $x = \theta_n \in I$: $\frac{3a_n}{2+b_n} < \theta_n < \frac{1}{3} \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n} \right)$. On multiplie par 3×2^n , sachant que $3 \times 2^n \theta_n = \pi$:

$$9 \times 2^n \frac{a_n}{2 + b_n} < \pi < 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n} \right).$$

- c) $\theta_n \rightarrow 0$, donc $b_n \rightarrow 1$ et $2^n a_n = 2^n \sin \theta_n \sim 2^n \theta_n = \frac{\pi}{3}$. Le minorant tend vers $9 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{3} = \pi$ et le majorant vers $\frac{\pi}{3}(2 + 1) = \pi$.

Les deux bornes tendent vers π .

- d) On itère tant que l'écart entre les deux bornes dépasse ϵ . La mise à jour de **a** utilise l'ancienne valeur de **b**, ce qui est correct puisque **b** n'est modifié qu'ensuite. À la sortie, π est dans un intervalle de longueur au plus ϵ , dont **x** est une borne.

def h(ϵ):

$k = 0$

$a = \text{np.sqrt}(3) / 2$

$b = 1 / 2$

 while $2^{**k} * (2*a + a/b) - 9 * 2^{**k} * a / (2 + b) > \epsilon$:

$a = \text{np.sqrt}((1 - b) / 2)$

$b = \text{np.sqrt}((1 + b) / 2)$

$k = k + 1$

$x = 2^{**k} * (2*a + a/b)$

 return x, k

- e) On peut écrire :

def iterations(p):

$N = \text{np.zeros}(p)$

 for k in range(1, $p + 1$):

$x, n = h(10^{**(-k)})$

$N[k-1] = n$

 return N

- f) *Première phase* (précisions 10^{-1} à 10^{-15} environ). Le nombre d'itérations croît à peu près linéairement avec k , d'environ 0,8 itération par décimale supplémentaire. En effet, un développement limité donne $f(x) - g(x) \sim cx^5$ au voisinage de 0, donc

l'écart entre les bornes est de l'ordre de $2^n \theta_n^5$, proportionnel à 16^{-n} : chaque itération fait gagner environ $\log_{10} 16 \approx 1,2$ décimale. La convergence est géométrique.

Seconde phase (palier à 13 itérations au-delà de 10^{-16}). Les calculs sont faits en nombres flottants, avec environ 16 chiffres significatifs. L'écart calculé entre les deux bornes devient nul (erreurs d'arrondi), et la boucle s'arrête toujours après 13 itérations : il est illusoire de demander une précision meilleure que 10^{-16} .

Problème – Lois implosives

Problème – Partie A – Résultats préliminaires

Questions 1 à 3.

Corrigé – Problème.

1. Fonction de répartition de Y_n .

$[Y_n > x] = \bigcap_{i=1}^n [X_i > x]$. Par indépendance, $P([Y_n > x]) = \prod_{i=1}^n P([X_i > x]) = (1 - F(x))^n$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n.$$

2. Densité de Y_n .

X étant à densité, F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf peut-être en un nombre fini de points, avec $F' = f$ ailleurs. Il en est de même de $F_n = 1 - (1 - F)^n$, avec $F'_n = nf(1 - F)^{n-1}$ en dehors de ces points. Donc Y_n est à densité, et l'on peut prendre :

$$f_n(x) = nf(x)(1 - F(x))^{n-1}.$$

3. Espérance et fonction de répartition.

Comme $V \geq 0$, on prend φ nulle sur $\mathbb{R}_-^*$. Alors $\Phi(t) = \int_0^t \varphi$ pour $t \geq 0$, et Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $\Phi' = \varphi$.

- a) Soit $x \geq 0$. Les fonctions $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \Phi(t) - 1$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$, avec $u' = 1$ et $v' = \varphi$. Par intégration par parties :

$$\int_0^x t\varphi(t) dt = [t(\Phi(t) - 1)]_0^x - \int_0^x (\Phi(t) - 1) dt.$$

$$\int_0^x t\varphi(t) dt = \int_0^x (1 - \Phi(t)) dt - x(1 - \Phi(x)).$$

- b) $0 \leq x(1 - \Phi(x)) = \int_x^{+\infty} x\varphi(t) dt \leq \int_x^{+\infty} t\varphi(t) dt$, qui tend vers 0 (reste d'une intégrale convergente). Avec a), $\int_0^x (1 - \Phi) \rightarrow \int_0^{+\infty} t\varphi(t) dt = \mathbb{E}(V)$.

$$x(1 - \Phi(x)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t)) dt \text{ converge.}$$

- c) Par a), $\int_0^x t\varphi(t) dt \leq \int_0^x (1 - \Phi) \leq \int_0^{+\infty} (1 - \Phi)$. La fonction $x \mapsto \int_0^x t\varphi$ est croissante et majorée, donc converge ; comme $t\varphi(t) \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\varphi = 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$:

$$V \text{ admet une espérance.}$$

d) b) et c) donnent l'équivalence, et b) donne la valeur.

V admet une espérance $\iff \int_0^{+\infty} (1 - \Phi) dt$ converge,
et alors $\mathbb{E}(V) = \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t)) dt$.

Problème – Partie B – Quelques exemples

Questions 4 et 5.

Corrigé – Problème.

4. Un exemple à densité.

a) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \arctan A = \frac{\pi}{2}$ et $f \geq 0$ ssi $\alpha \geq 0$; il faut donc $\alpha \frac{\pi}{2} = 1$.

$$\alpha = \frac{2}{\pi}.$$

b)

$$F(x) = 0 \quad (x < 0), \quad F(x) = \frac{2}{\pi} \arctan x \quad (x \geq 0).$$

c) D'après A.1 et A.2 :

$$F_2(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctan x\right)^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{4}{\pi(1+x^2)} \left(1 - \frac{2}{\pi} \arctan x\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

d) $\psi : x \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$, avec $\psi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$. Elle est donc constante, égale à $\psi(1) = \frac{\pi}{2}$.

$$\forall x > 0, \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

e) Pour $x > 0$, $1 - \frac{2}{\pi} \arctan x = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi x}$, et $\frac{4}{\pi(1+x^2)} \sim \frac{4}{\pi x^2}$.

$$f_2(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{8}{\pi^2 x^3}.$$

f) $xf(x) \sim \frac{2}{\pi x}$: l'intégrale $\int_0^{+\infty} xf(x) dx$ diverge (Riemann, termes positifs), donc X n'a pas d'espérance. En revanche $xf_2(x) \sim \frac{8}{\pi^2 x^2}$, et xf_2 est continue sur $\mathbb{R}_+$: $\int_0^{+\infty} xf_2(x) dx$ converge, donc Y_2 admet une espérance.

La loi de X est implosive, d'indice d'implosion 2.

5. Un exemple discret.

- a) Les termes sont positifs, et la somme est télescopique : $\sum_{k=0}^N \mathbb{P}(X = k) = 1 - \frac{1}{\sqrt{N+2}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1.$$

- b) $k\mathbb{P}(X = k) = \frac{k}{\sqrt{k+1}\sqrt{k+2}(\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1})} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{k}}$, terme général d'une série divergente (Riemann, $\frac{1}{2} \leq 1$).

X n'admet pas d'espérance.

- c) Par télescopage :

$$F(k) = 1 - \frac{1}{\sqrt{k+2}}.$$

On en déduit $\mathbb{P}(X \geq k) = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- d) Y_2 est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et, par indépendance, $\mathbb{P}(Y_2 \geq k) = \mathbb{P}(X \geq k)^2 = \frac{1}{k+1}$. Donc $\mathbb{P}(Y_2 = k) = \mathbb{P}(Y_2 \geq k) - \mathbb{P}(Y_2 \geq k+1)$, et $k\mathbb{P}(Y_2 = k) \sim \frac{1}{k}$, terme général d'une série divergente.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Y_2 = k) = \frac{1}{(k+1)(k+2)} ; Y_2 \text{ n'admet pas d'espérance.}$$

- e) De même, $\mathbb{P}(Y_3 \geq k) = (k+1)^{-3/2}$. Or

$$(k+1)^{-3/2} - (k+2)^{-3/2} = (k+1)^{-3/2} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{k+1} \right)^{-3/2} \right) \sim \frac{3}{2} k^{-5/2},$$

donc $k\mathbb{P}(Y_3 = k) \sim \frac{3}{2} k^{-3/2}$: la série converge (Riemann, $\frac{3}{2} > 1$).

$$\mathbb{P}(Y_3 = k) = \frac{1}{(k+1)^{3/2}} - \frac{1}{(k+2)^{3/2}} ; Y_3 \text{ admet une espérance.}$$

- f)

La loi de X est implosive, d'indice d'implosion 3.

Problème – Partie C – Loi implosive d'indice fixé
Question 6.
Corrigé – Problème.
6. Lois de Pareto.

- a) $\int_1^A x^{-\alpha} dx = \frac{1-A^{1-\alpha}}{\alpha-1} \rightarrow \frac{1}{\alpha-1}$ (car $\alpha > 1$). La fonction f est positive et continue sauf

en 1 si $a \geq 0$, et son intégrale vaut 1 si :

$$a = \alpha - 1.$$

b)

$$F(x) = 0 \ (x < 1), \quad F(x) = 1 - x^{1-\alpha} \ (x \geq 1).$$

c) $xf(x) = (\alpha - 1)x^{1-\alpha}$ sur $[1, +\infty[$: l'intégrale converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$ (Riemann).

$$X \text{ admet une espérance} \iff \alpha > 2.$$

d) D'après A.2, pour $x \geq 1$: $f_n(x) = n(\alpha - 1)x^{-\alpha} \cdot x^{(n-1)(1-\alpha)} = n(\alpha - 1)x^{-(n(\alpha-1)+1)}$, et $f_n = 0$ sur $] -\infty, 1[$. Donc Y_n suit une loi du même type, de paramètre $\beta_n = n(\alpha - 1) + 1 > 1$. D'après c), Y_n admet une espérance ssi $\beta_n > 2$.

$$Y_n \text{ admet une espérance} \iff n(\alpha - 1) > 1 \iff \alpha > 1 + \frac{1}{n}.$$

e) Soit $m \geq 2$ et $\alpha = 1 + \frac{1}{m-1} \in]1, 2]$. Alors X n'a pas d'espérance (c). Pour $2 \leq n \leq m-1$, $n(\alpha - 1) = \frac{n}{m-1} \leq 1$, donc Y_n n'a pas d'espérance, tandis que $m(\alpha - 1) = \frac{m}{m-1} > 1$.

$$\text{Oui : pour } \alpha = 1 + \frac{1}{m-1}, \text{ la loi de } X \text{ est implosive d'indice } m.$$

Problème – Partie D – Lois non implosives

Question 7.

Corrigé – Problème.

7. Un exemple.

a) Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x \ln^2 x}$ sur $[2, +\infty[$ est $x \mapsto -\frac{1}{\ln x}$. Donc $\int_2^A \frac{dx}{x \ln^2 x} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln A} \rightarrow \frac{1}{\ln 2}$.

$$a = \ln 2.$$

b)

$$F(x) = 0 \ (x < 2), \quad F(x) = 1 - \frac{\ln 2}{\ln x} \ (x \geq 2).$$

c) $xf(x) = \frac{\ln 2}{\ln^2 x}$. Par croissances comparées, $\frac{\ln^2 x}{x} \rightarrow 0$, donc $\frac{\ln 2}{\ln^2 x} \geq \frac{\ln 2}{x}$ pour x assez grand, et l'intégrale de Riemann $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge.

$$X \text{ n'admet pas d'espérance.}$$

d) Pour $x \geq 2$, $1 - F_n(x) = \left(\frac{\ln 2}{\ln x}\right)^n$. Y_n admet une densité (A.2), continue sur $\mathbb{R}_+$ sauf en 2. Par A.3 (résultat admis), Y_n admet une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} (1 - F_n) \cdot x \, dx$ converge. Or $\frac{(\ln x)^n}{x} \rightarrow 0$, donc $\left(\frac{\ln 2}{\ln x}\right)^n \geq \frac{(\ln 2)^n}{x}$ pour x assez grand : l'intégrale diverge.

$$\text{Pour tout } n \geq 2, Y_n \text{ n'admet pas d'espérance.}$$

e)

Oui : X est positive, sans espérance, et sa loi n'est pas implosive.

Problème – Partie E – Variables implosant sur une autre

Questions 8 à 11.

Corrigé – Problème.

8. Expression de F .

Notons G la fonction de répartition de Y . D'après A.1, $G = 1 - (1 - F)^n$, d'où $(1 - F)^n = 1 - G$, avec $1 - F \geq 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = 1 - (1 - G(x))^{1/n}.$$

9. Le cas géométrique.

Supposons que X implose sur $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, avec un indice m , et notons $q = 1 - p$. Pour $x \geq 0$, $1 - G(x) = \mathbb{P}(Y > \lfloor x \rfloor) = q^{\lfloor x \rfloor}$, et $1 - G(x) = 1$ pour $x < 0$. Par 8, $1 - F(x) = (q^{1/m})^{\lfloor x \rfloor}$ pour $x \geq 0$, et 1 sinon. C'est la fonction de répartition de la loi géométrique de paramètre $p' = 1 - q^{1/m} \in]0, 1[$. Comme la fonction de répartition caractérise la loi, $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p')$, qui admet une espérance $(\frac{1}{p'})$: contradiction avec le caractère implosif.

Aucune variable implosive n'implose sur une variable de loi géométrique.

10. Existence.

Soit $m \geq 2$. On prend X de densité f de la partie C avec $\alpha = 1 + \frac{1}{m-1}$: sa loi est implosive d'indice m (question 6.e). On pose $Y = Y_m = \min(X_1, \dots, X_m)$, qui est positive et admet une espérance (6.d).

$$X \text{ implose sur } Y = Y_m.$$

11. Autres indices.

Notons $S = 1 - F$ et $\bar{G} = 1 - G$. Par 8, $S = \bar{G}^{1/m}$ et $\bar{G} = S^m$.

- *Lien entre espérance et intégrale de la fonction de survie.* Pour $t > 0$, la fonction $1 - \bar{G}^t$ est croissante, continue, de limites 0 et 1. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en un nombre fini de points (ceux de G , et éventuellement le premier point où $\bar{G}$ s'annule), car $\bar{G}$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en un nombre fini de points. Une variable positive ayant cette fonction de répartition est donc à densité, et d'après A.3, elle admet une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} \bar{G}^t = \int_0^{+\infty} S^{mt}$ converge.
- *Ce que donne l'indice m de X .* $\int_0^{+\infty} S$ et $\int_0^{+\infty} S^{m-1}$ divergent, tandis que $\int_0^{+\infty} S^m$ converge. Comme $0 \leq S \leq 1$, la fonction $s \mapsto S^s$ décroît. Donc $\int_0^{+\infty} S^s$ diverge pour $s \leq m-1$ et converge pour $s \geq m$.

Soit $2 \leq k \leq m$. La fonction $1 - \bar{G}^{1/k}$ est une fonction de répartition (croissante, continue, de limites 0 et 1). On admet l'existence d'une variable aléatoire positive $X^{(k)}$ qui la possède, et l'on considère une suite de variables indépendantes de même loi que $X^{(k)}$. D'après A.1, le minimum de j d'entre elles a pour fonction de survie $\bar{G}^{j/k} = S^{jm/k}$.

- $X^{(k)}$ ($j = 1$) : $\frac{m}{k} \leq \frac{m}{2} \leq m - 1$, donc pas d'espérance.
- Pour $2 \leq j \leq k - 1$: $\frac{j m}{k} \leq m - \frac{m}{k} \leq m - 1$ (car $k \leq m$), donc pas d'espérance.
- Pour $j = k$: la fonction de survie vaut $\bar{G} = S^m$, donc le minimum a la loi de Y et admet une espérance.

Pour tout $k \in \{2, \dots, m\}$, $X^{(k)}$ est implosive d'indice k et implose sur Y .

Problème – Partie F – Variables explosives

Questions 12 et 13.

Corrigé – Problème.
12. Indice d'explosion.

Les X_i étant positives, on a $0 \leq X_1 \leq Z_n \leq X_1 + \dots + X_n$.

- Si X admet une espérance, $X_1 + \dots + X_n$ aussi (linéarité). Par comparaison de variables positives, chaque Z_n admet une espérance : la loi de X n'est pas explosive.
- Si X n'admet pas d'espérance, Z_2 non plus, puisque $0 \leq X_1 \leq Z_2$. L'indice d'explosion vaut alors 2.

Une loi explosive a donc nécessairement pour indice d'explosion 2. Ce cas est réalisé, par exemple, par la loi de la question 4.

Il existe des lois explosives d'indice m si et seulement si $m = 2$.

13. Lois non explosives.

D'après 12, toute variable positive admettant une espérance (par exemple de loi exponentielle) n'est pas explosive.

Oui : les variables positives non explosives sont exactement celles qui admettent une espérance.