

Concours Ecricome

Mathématiques

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2015

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1 Exercice 1	2
<i>Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; intégrales généralisées.</i>	
	2
2 Exercice 2	2
<i>Thèmes abordés : Fonctions d'une variable ; suites ; Python.</i>	
	2
3 Problème	4
<i>Thèmes abordés : Variables à densité ; probabilités discrètes ; couples de variables discrètes ; intégrales généralisées.</i>	
	4

1 Exercice 1

Thèmes abordés : Espaces vectoriels ; applications linéaires ; algèbre bilinéaire ; intégrales généralisées.

Soit n un entier naturel et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Pour tout polynôme P de E , on pose $\varphi(P) = P'' - 2XP'$.

1. a) Montrer que φ est un endomorphisme de E .
 b) Déterminer la matrice associée à φ dans la base canonique de E .
 c) Montrer que φ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
2. Pour tout (P, Q) de E^2 , on note

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt.$$

- a) Montrer que, pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\langle P, Q \rangle$ est bien défini.
- b) Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ définit un produit scalaire sur E .
3. Montrer que φ est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
4. On définit une famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de polynômes de E par

$$P_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad P_k = X^k - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle P_i, X^k \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle} P_i.$$

- a) Montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
- b) Montrer que la base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est constituée de vecteurs propres de φ .

2 Exercice 2

Thèmes abordés : Fonctions d'une variable ; suites ; Python.

1. On note, pour tout $x \in I =]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$f(x) = \frac{1}{3}(2\sin(x) + \tan(x)) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3\sin(x)}{2 + \cos(x)}.$$

- a) Factoriser le polynôme $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
- b) On pose $u(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in I$. Justifier que u est dérivable sur I et que, pour tout $x \in I$, $u'(x) = \frac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}$.
- c) En déduire les variations de u sur I .
- d) On pose $v(x) = x - g(x)$ pour tout $x \in I$. Justifier qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$, de degré deux, tel que, pour tout $x \in I$, $v'(x) = \frac{Q(\cos(x))}{(2 + \cos(x))^2}$.
- e) En déduire les variations de v sur I .
- f) Montrer que $\forall x \in I, \quad g(x) < x < f(x)$.

2. a) En utilisant le fait que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
 b) Dédire de la question 1(f) un encadrement de π .
3. Pour tout entier naturel n , on pose

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right).$$

- a) Justifier que, pour tout réel θ , $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$, et en déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - b_n}{2}} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + b_n}{2}}.$$

- b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

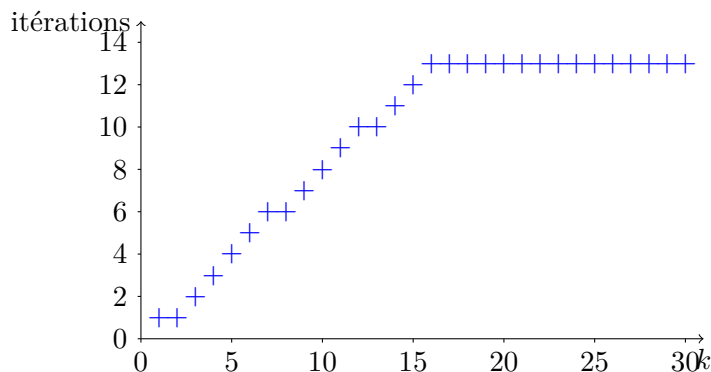
$$9 \times 2^n \frac{a_n}{2 + b_n} < \pi < 2^n \left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right).$$

- c) Justifier que les deux termes de l'encadrement précédent tendent vers π lorsque n tend vers l'infini.
 d) Écrire une fonction Python **h(e)** qui retourne, à l'aide des relations précédentes et de la question 3(b), une approximation **x** de π à **e** près, ainsi que le nombre **k** d'itérations nécessaires.

```
from math import sqrt

def h(e):
    k = 0
    a, b = sqrt(3) / 2, 1 / 2
    bas = 9 * (2 ** k) * a / (2 + b)
    haut = (2 ** k) * (2 * a + a / b)
    while haut - bas > e:
        a, b = sqrt((1 - b) / 2), sqrt((1 + b) / 2)
        k += 1
        bas = 9 * (2 ** k) * a / (2 + b)
        haut = (2 ** k) * (2 * a + a / b)
    return (bas + haut) / 2, k
```

- e) Écrire une fonction Python qui prend comme paramètre d'entrée un entier p et retourne une liste de taille p contenant les nombres d'itérations nécessaires pour les précisions 10^{-k} , où $k \in \{1, 2, \dots, p\}$.
 f) L'utilisation de la fonction précédente avec $p = 30$ conduit au graphique ci-dessous. Commenter ce graphique.



3 Problème

Thèmes abordés : Variables à densité ; probabilités discrètes ; couples de variables discrètes ; intégrales généralisées.

Toutes les variables aléatoires introduites dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On considère X , variable aléatoire à valeurs positives, et $(X_n)_{n \geq 1}$, suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi que X . Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $Y_n = \inf(X_1, X_2, \dots, X_n)$, c'est-à-dire

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Y_n(\omega) = \min(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)).$$

La loi de X est dite *implosive* si X n'admet pas d'espérance et s'il existe un entier $m \geq 2$ tel que Y_m admette une espérance. Dans ce cas, l'indice d'implosion de X est le plus petit entier $m \geq 2$ tel que Y_m admette une espérance.

On note F la fonction de répartition de X et F_n celle de Y_n pour $n \geq 2$. Dans le cas où X (respectivement Y_n) admet une densité, on la note f (respectivement f_n).

Partie A – Résultats préliminaires

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n$.
2. On suppose que X admet une densité f . Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, Y_n admet une densité f_n et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = nf(x)(1 - F(x))^{n-1}$.
3. On souhaite prouver que, pour une variable aléatoire positive V admettant une densité φ continue sur $\mathbb{R}_+$ et de fonction de répartition Φ ,

$$V \text{ admet une espérance} \iff \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t)) dt \text{ converge,}$$

et que, dans ce cas, $\mathbb{E}(V) = \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t)) dt$.

- a) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $\int_0^x t\varphi(t) dt = \int_0^x (1 - \Phi(t)) dt - x(1 - \Phi(x))$.
- b) On suppose que V admet une espérance. Montrer que $x(1 - \Phi(x))$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, puis que $\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t)) dt$ converge.
- c) On suppose que $\int_0^{+\infty} (1 - \Phi(t)) dt$ converge. Montrer que V admet une espérance.
- d) Conclure.

On admet que ce résultat reste vrai si φ est continue sur $\mathbb{R}_+$ sauf en un nombre fini de points.

Partie B – Quelques exemples

4. On suppose que X admet pour densité f définie par $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = \frac{\alpha}{1+x^2}$ si $x \geq 0$.
 - a) Déterminer le réel α .
 - b) Donner la fonction de répartition F de X .
 - c) Déterminer la fonction de répartition F_2 de Y_2 et justifier que Y_2 admet une densité f_2 , que l'on calculera.
 - d) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

- e) En déduire un équivalent de f_2 en $+\infty$.
- f) En déduire que la loi de X est implosive et donner son indice d'implosion.
5. On suppose que X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}$.
- a) Vérifier que $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$.
- b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?
- c) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, donner la valeur de $F(k) = \mathbb{P}(X \leq k)$.
- d) Déterminer la loi de Y_2 . Admet-elle une espérance ?
- e) Déterminer la loi de Y_3 . Admet-elle une espérance ?
- f) La loi de X est-elle implosive ? Si oui, quel est son indice d'implosion ?

Partie C – Loi implosive d'indice fixé

On cherche à savoir si, pour tout entier naturel $m \geq 2$, il existe une loi implosive d'indice d'implosion égal à m .

6. Soit $\alpha > 1$.
- a) Déterminer un réel a tel que la fonction f définie par $f(x) = 0$ si $x < 1$ et $f(x) = \frac{a}{x^\alpha}$ si $x \geq 1$ soit une densité de probabilité.
- b) Dans la suite de cette partie, X admet f pour densité. Déterminer la fonction de répartition F de X .
- c) Discuter, en fonction de α , l'existence de l'espérance de X .
- d) Discuter, en fonction de n et de α , l'existence de l'espérance de Y_n .
- e) Répondre à la question posée.

Partie D – Lois non implosives

On cherche à savoir s'il existe des variables aléatoires positives n'admettant pas d'espérance et dont la loi n'est pas implosive.

7. a) Déterminer un réel a tel que la fonction f définie par $f(x) = 0$ si $x < 2$ et $f(x) = \frac{a}{x \ln^2(x)}$ si $x \geq 2$ soit une densité de probabilité.
- b) Dans la suite, X admet f pour densité. Déterminer la fonction de répartition F de X .
- c) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?
- d) Discuter l'existence de l'espérance de Y_n .
- e) Répondre à la question posée.

Partie E – Variables implosant sur une autre

Soit Y une variable aléatoire positive admettant une espérance. On dit que X *implose sur* Y si X est implosive et si, en notant m son indice d'implosion, Y_m suit la même loi que Y .

8. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles et soit $n \geq 2$ tel que Y_n ait la même loi que Y . À l'aide de la formule de la question A.1, exprimer la fonction de répartition de X en fonction de celle de Y .
9. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. À l'aide de la question précédente, montrer qu'il n'existe aucune variable aléatoire X implosive qui implose sur Y .
10. Soit $m \geq 2$. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Y admettant une espérance et une variable aléatoire X implosive d'indice m qui implose sur Y . On pourra s'inspirer des résultats de la partie C.
11. Soit Y une variable aléatoire positive admettant une densité g , de fonction de répartition G , et soit $m \geq 2$. Montrer que, s'il existe une variable aléatoire X implosive d'indice m qui implose sur Y , alors, pour tout entier $k \geq m$, il existe une variable aléatoire implosive d'indice k qui implose sur Y .

Partie F – Variables explosives

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $Z_n = \sup(X_1, X_2, \dots, X_n)$, c'est-à-dire

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Z_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)).$$

La loi de X est dite *explosive* s'il existe un entier $m \geq 2$ tel que Z_m n'admette pas d'espérance. Dans ce cas, l'indice d'explosion de X est le plus petit entier $m \geq 2$ tel que Z_m n'admette pas d'espérance.

12. Pour un entier m donné, existe-t-il des variables aléatoires de loi explosive dont l'indice d'explosion est m ?
13. Existe-t-il des variables aléatoires positives qui ne sont pas explosives ?