

EDHEC

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2015

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Exercice 1

Exercice 1 – Les intégrales I_n et J_n

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)} \text{ et } J_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)^2}.$$

Corrigé – Exercice 1.

1. Convergence de I_n .

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^n(x+1)}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$, et majorée par $\frac{1}{x^{n+1}}$ avec $n+1 \geq 2$. Par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente :

$$I_n \text{ converge.}$$

2. Calcul de I_1 .

$$\text{a) } \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}.$$

$$a = b = 1.$$

$$\text{b) Pour } A > 1 : \int_1^A \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln \frac{A}{A+1} - \ln \frac{1}{2} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \ln 2.$$

$$I_1 = \ln 2.$$

3. Limite de (I_n) .

a) Pour $x \geq 1$, $x+1 \geq 2$, donc $0 \leq \frac{1}{x^n(x+1)} \leq \frac{1}{2x^n}$. Pour $n \geq 2$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1}$. Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}.$$

b) Par encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

4. Équivalent de I_n .

$$\text{a) } I_n + I_{n+1} = \int_1^{+\infty} \frac{1+x}{x^{n+1}(x+1)} dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+1}}.$$

$$I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n}.$$

b) $I_{n+1} - I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1-x}{x^{n+1}(x+1)} dx \leq 0$, car $1-x \leq 0$ sur $[1, +\infty[$.

(I_n) est décroissante.

c) Pour $n \geq 2$, par décroissance : $\frac{1}{n} = I_n + I_{n+1} \leq 2I_n \leq I_{n-1} + I_n = \frac{1}{n-1}$. Donc $\frac{n}{2n} \leq nI_n \leq \frac{n}{2(n-1)}$, et par encadrement $nI_n \rightarrow \frac{1}{2}$.

$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$; la série $\sum I_n$ diverge

(par comparaison de séries à termes positifs avec la série harmonique).

5. Les intégrales J_n .

a) La fonction est continue et positive sur $[1, +\infty[$, et $0 \leq \frac{1}{x^n(x+1)^2} \leq \frac{1}{x^2}$. Par comparaison :

J_n converge.

b) $\int_1^A \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{A+1}$.

$J_0 = \frac{1}{2}$.

6. Somme alternée.

a) Par linéarité : $J_k + J_{k-1} = \int_1^{+\infty} \frac{1+x}{x^k(x+1)^2} dx$.

$J_k + J_{k-1} = I_k$.

b) Par télescopage :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k = \sum_{k=1}^n ((-1)^{k-1} J_{k-1} - (-1)^k J_k) = J_0 - (-1)^n J_n.$$

$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k = \frac{1}{2} + (-1)^{n-1} J_n$.

c) Pour $x \geq 1$, $(x+1)^2 \geq 4$, donc $0 \leq J_n \leq \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{4(n-1)}$ pour $n \geq 2$. Par encadrement, $J_n \rightarrow 0$, puis par b) :

$0 \leq J_n \leq \frac{1}{4(n-1)}, \quad \lim J_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} I_n = \frac{1}{2}.$

7. Programme Python.

On a $J_1 = I_1 - J_0 = \ln 2 - \frac{1}{2}$ (6.a). Puis, pour $k \geq 2$: $I_k = \frac{1}{k-1} - I_{k-1}$ (4.a) et $J_k = I_k - J_{k-1}$ (6.a). On met donc à jour I avant J.

```
def calcul(n):
    I = np.log(2)
    J = 1 / 2
    J = I - J
    for k in range(2, n + 1):
        I = 1 / (k - 1) - I
        J = I - J
    return I, J
```

Exercice 2

Exercice 2 – Valeur absolue d'une loi normale

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, $Y = |X|$, Z de densité g .

Corrigé – Exercice 2.

1. Loi de Y .

- a) Pour $x \geq 0$, $F_Y(x) = P(-x \leq X \leq x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1$, et $F_Y(x) = 0$ pour $x < 0$. F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ (en 0 : $2\Phi(0) - 1 = 0$) et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$: Y est à densité.

$$F_Y(x) = 2\Phi(x) - 1 \quad (x \geq 0), \quad f_Y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2} \quad (x \geq 0), \quad 0 \text{ sinon.}$$

- b) $x \mapsto x f_Y(x)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, et

$$\int_0^A \sqrt{\frac{2}{\pi}} x e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 - e^{-A^2/2}) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

$$\mathbb{E}(Y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

- c) $Y^2 = X^2$ admet une espérance égale à $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = 1$. Donc Y admet une variance, et :

$$\mathbb{V}(Y) = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

2. La fonction g .

- a) L'application $u \mapsto t = \frac{u^2}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$, avec $dt = u du$. Le changement de variable conserve donc la nature des intégrales, et

$$g\left(\frac{u^2}{2}\right) u = \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{\pi u^2/2}} u = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-u^2/2}.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du$ converge, et

$$\int_0^{+\infty} g(t) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du.$$

- b) Par parité de la densité de $\mathcal{N}(0, 1)$, $\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} g = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1$. De plus g est positive et continue sur $\mathbb{R}^*$.

$$g \text{ est une densité de probabilité.}$$

3. Loi de $T = \sqrt{2Z}$.

- a) $Z \geq 0$ presque sûrement, car g est nulle sur $\mathbb{R}_-$. Pour $x < 0$, $F_T(x) = 0$; pour $x \geq 0$, $F_T(x) = P\left(Z \leq \frac{x^2}{2}\right) = G\left(\frac{x^2}{2}\right)$. En dérivant pour $x > 0$:

$$f_T(x) = xg\left(\frac{x^2}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2} = f_Y(x).$$

$$F_T(x) = G\left(\frac{x^2}{2}\right) \quad (x \geq 0), \quad f_T = f_Y : T \text{ et } Y \text{ ont la même loi.}$$

- b) $Z = \frac{T^2}{2}$, et T^2 a même loi que $Y^2 = X^2$, qui admet une espérance égale à 1.

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(T^2) = \frac{1}{2}.$$

4. Simulation de Z .

D'après 3, $Z = \frac{T^2}{2}$ a même loi que $\frac{Y^2}{2} = \frac{X^2}{2}$.

`Z = rd.normal(0, 1)**2 / 2`

5. Méthode de Monte-Carlo.

- a) `w` contient les réalisations de n variables $W_1, \dots, W_n$ indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$, et

$$\text{approx}(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{W_i \sqrt{W_i}}{\sqrt{\pi}}.$$

Les variables $\frac{W_i^{3/2}}{\sqrt{\pi}}$ sont indépendantes, de même loi, et admettent une variance ($x^3 e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$). D'après la loi faible des grands nombres, leur moyenne empirique converge en probabilité vers leur espérance. Par le théorème de transfert, celle-ci vaut

$$\mathbb{E}\left(\frac{W^{3/2}}{\sqrt{\pi}}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^2 g(x) dx.$$

$$\text{Pour } n \text{ grand, } \text{approx}(n) \text{ est une valeur approchée de } \int_0^{+\infty} x^2 g(x) dx.$$

- b) $\int_0^{+\infty} x^2 g(x) dx = \mathbb{E}(Z^2)$ (transfert), et Z a même loi que $\frac{X^2}{2}$, donc $\mathbb{E}(Z^2) = \frac{\mathbb{E}(X^4)}{4}$.

$$\int_0^{+\infty} x^2 g(x) dx = \frac{3}{4}.$$

Exercice 3

Exercice 3 – Racine carrée d'un endomorphisme symétrique

f symétrique à valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$, $\varphi(x, y) = \langle x, f(y) \rangle$.

Corrigé – Exercice 3.

1. Base orthonormale de vecteurs propres.

f est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. D'après le théorème spectral :

Il existe une base orthonormale $\mathcal{B}' = (u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs propres de f .

On note $f(u_i) = \lambda_i u_i$, avec $\lambda_i > 0$.

2. Le produit scalaire φ .

a) Soit $x = \sum x_i u_i$. Alors $f(x) = \sum \lambda_i x_i u_i$ et, $\mathcal{B}'$ étant orthonormale :

$$\langle x, f(x) \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq 0.$$

b) Comme les λ_i sont strictement positifs, $\sum \lambda_i x_i^2 = 0$ équivaut à $x_i = 0$ pour tout i .

$$\langle x, f(x) \rangle = 0 \iff x = 0.$$

c) φ est bilinéaire (linéarité de f et bilinéarité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Elle est symétrique : $\varphi(y, x) = \langle y, f(x) \rangle = \langle f(y), x \rangle = \varphi(x, y)$, car f est symétrique. Elle est positive et définie par a) et b).

φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

3. Racine carrée de f .

a) Soit g l'endomorphisme défini par $g(u_i) = \sqrt{\lambda_i} u_i$. Sa matrice dans la base orthonormale $\mathcal{B}'$ est diagonale, donc symétrique : g est symétrique. Ses valeurs propres $\sqrt{\lambda_i}$ sont strictement positives, et $g^2(u_i) = \lambda_i u_i = f(u_i)$ pour tout i .

g est symétrique, de valeurs propres $\sqrt{\lambda_i} > 0$, et $g^2 = f$.

b) 0 n'est pas valeur propre de g , donc $\text{Ker } g = \{0\}$: g est injectif, donc bijectif (endomorphisme en dimension finie).

g est bijectif.

c) Comme $f \circ g^{-1} = g^2 \circ g^{-1} = g$, et g étant symétrique :

$$\varphi(g^{-1}(e_i), g^{-1}(e_j)) = \langle g^{-1}(e_i), g(e_j) \rangle = \langle g(g^{-1}(e_i)), e_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

La famille est orthonormale pour φ , donc libre, et compte n vecteurs.

$(g^{-1}(e_1), \dots, g^{-1}(e_n))$ est une base orthonormale pour φ .

Problème

Problème – Partie I – Série binomiale

$$r \in \mathbb{N}, x \in]0, 1[.$$

Corrigé – Problème.

1. Équivalent de $\binom{n}{r}$.

Pour $n \geq r$, $\binom{n}{r} = \frac{1}{r!} \prod_{i=0}^{r-1} (n-i)$, et chacun des r facteurs est équivalent à n (pour $r = 0$, les deux membres valent 1).

$$\binom{n}{r} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}.$$

2. Convergence.

a) Par croissances comparées ($0 < x < 1$) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{r+2} x^n = 0.$$

b) Par 1 et a), $n^2 \binom{n}{r} x^n \sim \frac{n^{r+2} x^n}{r!} \rightarrow 0$, donc $0 \leq \binom{n}{r} x^n \leq \frac{1}{n^2}$ pour n assez grand. Par comparaison avec une série de Riemann convergente :

$$\sum \binom{n}{r} x^n \text{ converge.}$$

3. Calcul de S_r .

a) C'est une série géométrique de raison $x \in]0, 1[$.

$$S_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

b) Pour $n \geq 1$, $\binom{n}{r+1} = \binom{n-1}{r+1} + \binom{n-1}{r}$. Toutes les séries écrites convergent (question 2), et $\binom{r}{r+1} = 0$. En décalant l'indice ($m = n - 1$) :

$$\begin{aligned} S_{r+1} &= \sum_{n \geq r+1} \binom{n-1}{r+1} x^n + \sum_{n \geq r+1} \binom{n-1}{r} x^n \\ &= x \sum_{m \geq r+1} \binom{m}{r+1} x^m + x \sum_{m \geq r} \binom{m}{r} x^m = x S_{r+1} + x S_r. \end{aligned}$$

$$(1-x) S_{r+1} = x S_r.$$

c) Récurrence sur r : le cas $r = 0$ est a). Si $S_r = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$, alors b) donne $S_{r+1} = \frac{x}{1-x} S_r = \frac{x^{r+1}}{(1-x)^{r+2}}$.

$$\forall x \in]0, 1[, \forall r \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}.$$

d) On divise par $x^r \neq 0$:

$$\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.$$

Problème – Partie II – Étude probabiliste d'un jeu

X : nombre de manches jouées ; Y : nombre de manches gagnées ; G : gain.

Corrigé – Problème.

1. Loi de X .

a) $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour $k \in \mathbb{N}$, $[X = k] = \overline{D_1} \cap \dots \cap \overline{D_k} \cap D_{k+1}$. Par indépendance :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = \alpha(1 - \alpha)^k.$$

b) $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(T = k) = \alpha(1 - \alpha)^{k-1} : T \hookrightarrow \mathcal{G}(\alpha)$, donc $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\alpha}$.

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(T) - 1 = \frac{1 - \alpha}{\alpha}.$$

c)

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(T) = \frac{1 - \alpha}{\alpha^2}.$$

2. Loi de Y .

a) Sachant $[X = n]$, le joueur joue n manches indépendantes, gagnées chacune avec probabilité p .

$$\text{Sachant } [X = n], \quad Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \quad (Y = 0 \text{ certain si } n = 0).$$

b) Avec le système complet $([X = n])_{n \in \mathbb{N}}$ et la formule des probabilités totales, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \alpha(1 - \alpha)^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \\ &= \alpha(p(1 - \alpha))^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} ((1 - \alpha)(1 - p))^{n-k}. \end{aligned}$$

Avec $x = (1 - \alpha)(1 - p) \in]0, 1[$ et en posant $\beta = 1 - x = \alpha + p - \alpha p$, la partie I donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Y = k) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{p(1 - \alpha)}{\beta} \right)^k, \quad \beta = \alpha + p - \alpha p.$$

Comme $1 - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{p(1 - \alpha)}{\beta}$, la variable $Y + 1$ suit la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$.

3. Espérance et variance de Y .

On a $\mathbb{E}(Y) = \frac{\beta}{\alpha} - 1$, et

$$\mathbb{V}(Y) = \frac{1 - \frac{\alpha}{\beta}}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2} = \frac{(\beta - \alpha)\beta}{\alpha^2}, \quad \text{avec } \beta - \alpha = p(1 - \alpha).$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{p(1 - \alpha)}{\alpha}, \quad \mathbb{V}(Y) = \frac{p(1 - \alpha)(p + \alpha - p\alpha)}{\alpha^2}.}$$

4. Le gain G .

a) Le joueur gagne Y manches et en perd $X - Y$.

$$\boxed{G = Y - (X - Y) = 2Y - X.}$$

b) Par linéarité :

$$\boxed{\mathbb{E}(G) = \frac{2p(1 - \alpha)}{\alpha} - \frac{1 - \alpha}{\alpha} = \frac{(1 - \alpha)(2p - 1)}{\alpha}.}$$

c) Par le théorème de transfert, les termes étant positifs :

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n nk P(X = n) \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} n P(X = n) \cdot np = p \mathbb{E}(X^2).$$

$$\text{Or } \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1 - \alpha + (1 - \alpha)^2}{\alpha^2} = \frac{(1 - \alpha)(2 - \alpha)}{\alpha^2}.$$

$$\boxed{\mathbb{E}(XY) = \frac{p(1 - \alpha)(2 - \alpha)}{\alpha^2}.}$$

d) $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{p(1 - \alpha)}{\alpha^2}((2 - \alpha) - (1 - \alpha)) = \frac{p(1 - \alpha)}{\alpha^2}$. Alors

$$\mathbb{V}(G) = 4\mathbb{V}(Y) + \mathbb{V}(X) - 4\text{Cov}(X, Y) = \frac{1 - \alpha}{\alpha^2} (4p(p + \alpha - p\alpha) + 1 - 4p).$$

$$\boxed{\mathbb{V}(G) = \frac{(1 - \alpha)((1 - 2p)^2 + 4\alpha p(1 - p))}{\alpha^2}.}$$

5. Simulation.

a) D'après 1.b), $X + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(\alpha)$, et d'après 2.a), sachant X, Y suit une loi binomiale de paramètres X et p .

```
def jeu(alpha, p):
    X = rd.geometric(alpha) - 1
    Y = rd.binomial(X, p)
    return X, Y
```

b) On calcule $G = 2Y - X$:

```
G = 2*Y - X
return X, Y, G
```

(la ligne `return X, Y` étant remplacée par ces deux lignes).