

Année : 2015

École : EDHEC

Option : Mathématiques approfondies

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Sommaire

Exercice 1 : <i>Thèmes abordés : suites ; séries ; intégrales généralisées ; Python</i>	1
Exercice 2 : <i>Thèmes abordés : variables à densité ; intégrales généralisées ; Python</i>	2
Exercice 3 : <i>Thèmes abordés : réduction ; algèbre bilinéaire ; applications linéaires</i>	3
Problème : <i>Thèmes abordés : suites ; séries ; Probabilité discrètes ; couples de variables discrètes ; Python</i>	4

Exercice 1*Thèmes abordés : suites ; séries ; intégrales généralisées ; Python*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)}.$$

- 1) Vérifier que I_n est une intégrale convergente.
- 2) a) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout x différent de -1 et de 0 , on ait

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}.$$

b) En déduire la valeur de I_1 .

- 3) a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 ,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}.$$

b) En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

- 4) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_n + I_{n+1}$.
- b) Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
- c) En déduire un équivalent de I_n , puis donner la nature de la série de terme général I_n .

- 5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$J_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n(x+1)^2}.$$

- a) Montrer que J_n est une intégrale convergente.
- b) Calculer J_0 .
- 6) a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $J_k + J_{k-1}$ en fonction de I_k .
- b) Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k$$

en fonction de J_n .

- c) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2, \quad 0 \leq J_n \leq \frac{1}{4(n-1)}.$$

Donner la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$. En déduire que la série de terme général $(-1)^{n-1} I_n$ est convergente et donner sa somme.

- 7) À l'aide des questions 4a) et 6a), compléter le programme Python suivant afin qu'il calcule I_n et J_n pour une valeur de n , supérieure ou égale à 2 , entrée par l'utilisateur.

```
from math import log

n = int(input("Entrer une valeur de n supérieure ou égale à 2 : "))
I = log(2)
J = 1 / 2
J = ...
for k in range(2, n + 1):
    I = ...
    J = ...
print("La valeur de I est :", I)
print("La valeur de J est :", J)
```

Exercice 2

Thèmes abordés : variables à densité ; intégrales généralisées ; Python

On considère une variable aléatoire réelle X suivant une loi normale centrée réduite (espérance nulle et variance égale à 1) et on note Φ la fonction de répartition de X .

On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire réelle. On note F_Y sa fonction de répartition.

- 1)
 - a) Exprimer, pour tout réel x positif, $F_Y(x)$ à l'aide de $\Phi(x)$. En déduire que Y est une variable à densité et donner une densité f_Y de Y .
 - b) Montrer que Y admet une espérance et donner sa valeur.
 - c) Montrer que Y admet une variance et donner sa valeur.
- 2) On considère la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}} \quad \text{si } x > 0, \quad g(x) = 0 \quad \text{si } x \leq 0.$$

- a) Vérifier, en justifiant que l'on peut procéder au changement de variable $u = \sqrt{2t}$, que

$$\int_0^{+\infty} g(t) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du.$$

- b) En déduire que g peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire réelle Z de densité g , et on note G sa fonction de répartition.

- 3)
 - a) On pose $T = \sqrt{2Z}$. On admet que T est une variable aléatoire réelle à densité. Exprimer la fonction de répartition F_T de T en fonction de G , puis en déduire une densité f_T de T et vérifier que T suit la même loi que Y .
 - b) En déduire que Z possède une espérance et donner sa valeur.
- 4) Écrire une instruction Python permettant de simuler la variable aléatoire Z . On pourra utiliser la fonction `normal()` du module `numpy.random`.

- 5) On considère le programme Python suivant :

```
import numpy as np
```

```
n = int(input("Entrer la valeur de n : "))
```

```
w = np.random.exponential(1, n)
```

```
s = np.sum(w * np.sqrt(w)) / n / np.sqrt(np.pi)
```

a) En remarquant que

$$x^2 g(x) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} e^{-x},$$

montrer que s contient une valeur approchée de $\int_0^{+\infty} x^2 g(x) dx$ pour peu que l'on entre une valeur de n assez grande.

b) On admet que $E(X^4) = 3$. Quelle est la valeur exacte de l'intégrale dont il est question ci-dessus ?

Exercice 3

Thèmes abordés : réduction ; algèbre bilinéaire ; applications linéaires

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. Pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^n$, on note $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire canonique de x et de y .

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on rappelle qu'elle est orthonormale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, symétrique, dont les valeurs propres sont toutes strictement positives.

- 1) Justifier l'existence d'une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, formée de vecteurs propres de f .
- 2)
 - a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\langle x, f(x) \rangle \geq 0$.
 - b) Vérifier que l'égalité $\langle x, f(x) \rangle = 0$ a lieu si et seulement si $x = 0$.
 - c) En déduire que l'application φ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$\varphi(x, y) = \langle x, f(y) \rangle,$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

- 3)
 - a) En utilisant $\mathcal{B}'$, montrer qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^n$, symétrique pour le produit scalaire canonique, dont les valeurs propres sont strictement positives, et vérifiant $g^2 = f$.
 - b) Établir que g est bijectif.
 - c) Montrer que la famille

$$(g^{-1}(e_1), g^{-1}(e_2), \dots, g^{-1}(e_n))$$

est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire φ .

Problème

Thèmes abordés : suites ; séries ; Probabilité discrètes ; couples de variables discrètes ; Python

Partie I — Série binomiale

Dans cette partie, la lettre r désigne un entier naturel et x est un réel fixé de $]0, 1[$.

- 1) Montrer que, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, on a

$$\binom{n}{r} \sim \frac{n^r}{r!}.$$

- 2) a) Donner la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{r+2} x^n$.

b) En déduire que la série de terme général $\binom{n}{r} x^n$ est convergente.

- 3) a) Pour tout entier naturel r , on pose

$$S_r = \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n.$$

Donner la valeur de S_0 .

b) Établir, en utilisant la formule du triangle de Pascal, que $(1-x)S_{r+1} = xS_r$.

c) En déduire que

$$\forall x \in]0, 1[, \quad \forall r \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}.$$

- d) Donner enfin la valeur de $\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}$.

Partie II — Étude probabiliste d'un jeu

On désigne par α et p deux réels de $]0, 1[$. Un joueur participe à un jeu constitué d'une suite de manches.

Avant chaque manche, y compris la première, le joueur a une probabilité α de ne pas être autorisé à jouer la manche en question (on dit qu'il est disqualifié, et c'est définitif), et une probabilité $1 - \alpha$ d'y être autorisé, et ceci indépendamment du fait qu'il ait gagné ou perdu la manche précédente s'il y en a eu une. À chaque manche jouée, le joueur gagne un euro avec la probabilité p et perd un euro avec la probabilité $1 - p$.

Si le jeu a commencé, le joueur joue jusqu'à ce qu'il soit disqualifié, et on suppose que les manches sont jouées de façon indépendante. On note :

- X le nombre de manches jouées par le joueur avant d'être disqualifié ;

- Y le nombre de manches gagnées par le joueur ;
- G le gain du joueur à la fin du jeu.

On admet que X , Y et G sont des variables aléatoires réelles définies toutes les trois sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- 1) a) Donner la loi de X . On pourra noter D_k l'événement « le joueur ne joue pas la k -ième manche ».
b) On pose $T = X + 1$. Reconnaître la loi de T , puis en déduire que

$$E(X) = \frac{1 - \alpha}{\alpha}.$$

- c) En déduire également la valeur de $V(X)$.

- 2) a) Déterminer, pour tout entier naturel n , la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$.
b) En déduire, à l'aide de la partie I, la loi de Y .

- 3) Calculer l'espérance de Y , puis montrer que

$$V(Y) = \frac{p(1 - \alpha)(p + \alpha - p\alpha)}{\alpha^2}.$$

- 4) a) Exprimer G en fonction de X et Y .
b) En déduire l'espérance de G .
c) On admet l'existence de $E(XY)$. Établir que

$$E(XY) = \frac{p(1 - \alpha)(2 - \alpha)}{\alpha^2}.$$

- d) En déduire la variance de G .

- 5) a) Compléter le programme Python suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche les valeurs prises par X et Y . On pourra utiliser les fonctions `geometric()` et `binomial()` du module `numpy.random`.

```
import numpy as np

alpha = float(input("Entrer la valeur de alpha : "))
p = float(input("Entrer la valeur de p : "))
X = ...
Y = ...
print(X)
print(Y)
```

- b) Quelles instructions faut-il ajouter aux précédentes pour calculer et afficher la valeur prise par G ?