emlyon business school

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2015

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Problème 1

Problème 1 – Partie I – Étude d'endomorphismes

$E = \{P \in \mathbb{R}_4[X],\ P(0) = P(4) = 0\}$, $W = X(X-4)$, $\phi(Q) = WQ$, $\Delta(Q) = Q(X+1) - Q(X)$, $f = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1}$.

Corrigé – Problème 1.

1. E est un sous-espace vectoriel.

L'application $\theta : P \mapsto (P(0), P(4))$ est linéaire de $\mathbb{R}_4[X]$ dans $\mathbb{R}^2$, et $E = \operatorname{Ker}\theta$.

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_4[X].}$$

2. ϕ est un isomorphisme.

- Pour $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, WQ est de degré au plus 4 et s'annule en 0 et 4, donc $\phi(Q) \in E$. De plus ϕ est linéaire.
- Si $WQ = 0$, alors $Q = 0$ car $W \neq 0$ (comparer les degrés) : ϕ est injective.
- Si $P \in E$, 0 et 4 sont racines de P, donc $P = X(X-4)Q$ avec $\deg Q \leqslant 2$: ϕ est surjective.

$$\boxed{\phi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}_2[X] \text{ sur } E.}$$

3. Base et dimension de E.

L'image par l'isomorphisme ϕ de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est une base de E.

$$\boxed{(W,\ XW,\ X^2W) \text{ est une base de } E\ ;\ \dim E = 3.}$$

4. L'endomorphisme Δ.

a) Si $\deg Q \leqslant 2$, alors $\deg Q(X+1) \leqslant 2$, donc $\Delta(Q) \in \mathbb{R}_2[X]$. La linéarité est immédiate : $(\lambda Q + R)(X+1) = \lambda Q(X+1) + R(X+1)$.

$$\boxed{\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X]).}$$

b) Si Q est constant, $\Delta(Q) = 0$. Si $\deg Q = d \geqslant 1$, de coefficient dominant a, alors $(X+1)^d - X^d = dX^{d-1} + \cdots$, donc $\Delta(Q)$ a pour coefficient de X^{d-1} le réel $da \neq 0$ (les termes de degré inférieur ne contribuent qu'en degré $\leqslant d-2$).

$$\boxed{\deg \Delta(Q) = \deg Q - 1 \text{ si } \deg Q \geqslant 1, \qquad \Delta(Q) = 0 \text{ si } Q \text{ est constant.}}$$

c) Par b), $\operatorname{Ker}\Delta = \mathbb{R}_0[X]$ et $\operatorname{Im}\Delta \subset \mathbb{R}_1[X]$. Par le théorème du rang, $\operatorname{rg}\Delta = 3-1 = 2 = \dim \mathbb{R}_1[X]$.

$$\boxed{\operatorname{Ker}\Delta = \mathbb{R}_0[X], \qquad \operatorname{Im}\Delta = \mathbb{R}_1[X].}$$

d) Chaque application de Δ fait baisser le degré d'au moins 1 (ou donne 0). Pour $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $\Delta(Q) \in \mathbb{R}_1[X]$, puis $\Delta^2(Q) \in \mathbb{R}_0[X]$, et enfin $\Delta^3(Q) = 0$.

$$\boxed{\Delta \circ \Delta \circ \Delta = 0.}$$

5. L'endomorphisme f.

a) $f^3 = \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \Delta \circ \phi^{-1} = \phi \circ \Delta^3 \circ \phi^{-1}$.

$$\boxed{f \circ f \circ f = 0.}$$

b) $f(P) = 0 \iff \Delta(\phi^{-1}(P)) = 0 \iff \phi^{-1}(P) \in \mathbb{R}_0[X]$, donc $\operatorname{Ker} f = \phi(\mathbb{R}_0[X])$. Comme ϕ^{-1} est surjective, $\operatorname{Im} f = \phi(\operatorname{Im}\Delta) = \phi(\mathbb{R}_1[X])$.

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(W), \qquad \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(W, XW).}$$

c) Si $f(P) = \lambda P$ avec $P \neq 0$, alors $0 = f^3(P) = \lambda^3 P$, donc $\lambda = 0$. Réciproquement, 0 est valeur propre car $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$.

$$\boxed{\operatorname{Sp}(f) = \{0\}, \quad E_0(f) = \operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(W), \text{ de dimension 1.}}$$

d) Si f était diagonalisable, sa seule valeur propre étant 0, on aurait $f = 0$. Or $f(XW) = \phi(\Delta(X)) = W \neq 0$ (car $\Delta(X) = 1$).

$$\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Problème 1 – Partie II – Étude d'un produit scalaire

$\langle P_1, P_2\rangle = \sum_{k=0}^{4} P_1(k)P_2(k)$, $L_1 = (X-2)(X-3)$, $L_2 = (X-1)(X-3)$, $L_3 = (X-1)(X-2)$.

Corrigé – Problème 1.

6. Produit scalaire.

L'application est clairement bilinéaire et symétrique, et positive car $\langle P, P\rangle = \sum_{k=0}^{4} P(k)^2 \geqslant 0$. Si $\langle P, P\rangle = 0$, alors $P(0) = \cdots = P(4) = 0$: P est de degré au plus 4 avec 5 racines, donc $P = 0$.

$$\boxed{\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_4[X].}$$

7. La base (L_1, L_2, L_3).

Supposons $aL_1 + bL_2 + cL_3 = 0$. En évaluant en 1, 2 et 3 : $2a = 0$, $-b = 0$ et $2c = 0$. La famille est donc libre ; elle contient $3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ vecteurs.

$$\boxed{(L_1, L_2, L_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

8. Coordonnées et matrice de Δ.

a) On a $L_1(1) = 2$, $L_2(2) = -1$, $L_3(3) = 2$, et $L_i(j) = 0$ pour $i \neq j$ dans $\{1, 2, 3\}$. Les deux polynômes P et $\frac{P(1)}{2}L_1 - P(2)L_2 + \frac{P(3)}{2}L_3$ sont de degré au plus 2 et coïncident en 1, 2 et 3 ; ils sont donc égaux (leur différence a trois racines).

$$\boxed{P = \frac{P(1)}{2}L_1 - P(2)L_2 + \frac{P(3)}{2}L_3.}$$

b) On applique a) à $\Delta(L_j)$, avec $\Delta(L_j)(k) = L_j(k+1) - L_j(k)$. Comme $L_1(4) = 2$, $L_2(4) = 3$ et $L_3(4) = 6$:

- $\Delta(L_1)$ prend les valeurs $-2, 0, 2$ en $1, 2, 3$, donc $\Delta(L_1) = -L_1 + L_3$;
- $\Delta(L_2)$ prend les valeurs $-1, 1, 3$, donc $\Delta(L_2) = -\frac{1}{2}L_1 - L_2 + \frac{3}{2}L_3$;
- $\Delta(L_3)$ prend les valeurs $0, 2, 4$, donc $\Delta(L_3) = -2L_2 + 2L_3$.

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{(L_1,L_2,L_3)}(\Delta) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}.}$$

9. La base (N_1, N_2, N_3).

a) $W(1) = -3$, $W(2) = -4$ et $W(3) = -3$.

$$\boxed{M_1(1) = -6, \qquad M_2(2) = 4, \qquad M_3(3) = -6.}$$

b) $N_i = \frac{1}{M_i(i)}\phi(L_i) \in E$. De plus $N_i(0) = N_i(4) = 0$ et, pour $k \in \{1, 2, 3\}$, $N_i(k) = \delta_{i,k}$ (car $L_i(k) = 0$ pour $k \neq i$). Donc

$$\langle N_i, N_j \rangle = \sum_{k=1}^{3} N_i(k)N_j(k) = \delta_{i,j}.$$

La famille est orthonormale, donc libre, et compte $3 = \dim E$ vecteurs.

$$\boxed{(N_1, N_2, N_3) \text{ est une base orthonormée de } E.}$$

10. Matrice de ϕ.

$\phi(L_i) = M_i = M_i(i)N_i$.

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{(L),(N)}(\phi) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.}$$

11. Matrice de f.

Avec $D = \mathrm{diag}(-6, 4, -6)$ et $A = \mathrm{Mat}_{(L)}(\Delta)$, on a $\mathrm{Mat}_{(N)}(f) = DAD^{-1}$, de coefficients $\frac{d_i}{d_j}a_{i,j}$.

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{(N_1,N_2,N_3)}(f) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} \\ 1 & -\frac{9}{4} & 2 \end{pmatrix}.}$$

12. Projection orthogonale sur E.

a) $P \mapsto P(i)$ est linéaire, donc u est linéaire, et $u(P) \in E \subset \mathbb{R}_4[X]$.

$$\boxed{u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_4[X]), \text{ à valeurs dans } E.}$$

b) Comme $N_j(0) = N_j(4) = 0$ et $N_j(k) = \delta_{j,k}$ pour $k \in \{1,2,3\}$, on a $\langle P - u(P), N_j\rangle = P(j) - u(P)(j)$. Or $u(P)(j) = \sum_i P(i)N_i(j) = P(j)$.

$$\boxed{\forall j \in \{1,2,3\}, \quad \langle P - u(P), N_j\rangle = 0.}$$

c) Pour tout P, $u(P) \in E$ et $P - u(P)$ est orthogonal à la base (N_1, N_2, N_3) de E, donc à E. C'est la caractérisation du projeté orthogonal.

$$\boxed{u \text{ est la projection orthogonale sur } E.}$$

d) $Q(1) = 2$, $Q(2) = Q(3) = 0$, donc $u(Q) = 2N_1 = \frac{2}{-6}WL_1$.

$$\boxed{p_E(Q) = -\frac{1}{3}X(X-4)(X-2)(X-3).}$$

Problème 2

Problème 2 – Parties I et II – Transformée de Laplace et exemples

$L(u)(x) = \int_0^{+\infty} u(t)e^{-xt}\,dt$ pour $u \in E$ et $x > 0$.

Corrigé – Problème 2.

1. E est un sous-espace vectoriel.

La fonction nulle est dans E (avec $p = 0$). Soient $u, v \in E$ (d'entiers p_u, p_v), $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p = \max(p_u, p_v)$. Pour $t \geqslant 1$, $\frac{|u(t)|}{t^p} \leqslant \frac{|u(t)|}{t^{p_u}}$, et de même pour v. Donc $\frac{\alpha u(t)+v(t)}{t^p} \to 0$. Enfin $\alpha u + v$ est continue.

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}.}$$

2. Convergence de $L(u)(x)$.

$t^2u(t)e^{-xt} = \frac{u(t)}{t^p} \cdot t^{p+2}e^{-xt}$. Le premier facteur tend vers 0, le second aussi (croissances comparées, $x > 0$).

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} t^2u(t)e^{-xt} = 0.}$$

Il existe donc $T > 0$ tel que $|u(t)e^{-xt}| \leqslant \frac{1}{t^2}$ pour $t \geqslant T$, et $t \mapsto u(t)e^{-xt}$ est continue sur $[0, T]$. Par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} u(t)e^{-xt}\,dt \text{ converge (absolument).}}$$

3. Linéarité.

Par linéarité des intégrales convergentes :

$$\boxed{L(\alpha u + v) = \alpha L(u) + L(v).}$$

4. Les fonctions v_i.

v_i est continue et $v_i(t) = t^i e^{-at} \to 0$ ($p = 0$), donc $v_i \in E$. Soit $\lambda = x + a > 0$ et $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Par le théorème de transfert,

$$L(v_i)(x) = \int_0^{+\infty} t^i e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(Z^i),$$

avec $\mathbb{E}(Z^0) = 1$, $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{\lambda}$ et $\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{V}(Z) + \mathbb{E}(Z)^2 = \frac{2}{\lambda^2}$.

$$\boxed{L(v_0)(x) = \frac{1}{x+a}, \qquad L(v_1)(x) = \frac{1}{(x+a)^2}, \qquad L(v_2)(x) = \frac{2}{(x+a)^3}.}$$

5. Les fonctions w_n.

w_n est continue et $\frac{w_n(t)}{t^{n+1}} = \frac{1}{t} \to 0$, donc $w_n \in E$. On a $L(w_0)(x) = \frac{1}{x}$. Pour $n \geqslant 1$ et $A > 0$, on intègre par parties avec $t \mapsto t^n$ et $t \mapsto -\frac{e^{-xt}}{x}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$:

$$\int_0^A t^n e^{-xt}\, dt = \left[-\frac{t^n e^{-xt}}{x}\right]_0^A + \frac{n}{x}\int_0^A t^{n-1} e^{-xt}\, dt.$$

Le crochet tend vers 0, donc $L(w_n)(x) = \frac{n}{x} L(w_{n-1})(x)$, et par récurrence :

$$\boxed{L(w_n)(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}.}$$

Problème 2 – Partie III – Propriétés des transformées de Laplace

Questions 6 à 9.

Corrigé – Problème 2.

6. Limite en $+\infty$.

Comme $\frac{u(t)}{t^p} \to 0$, il existe $A \geqslant 1$ tel que $|u(t)| \leqslant t^p$ pour $t \geqslant A$. Sur le segment $[0, A]$, la fonction continue $|u|$ est bornée par un réel M (théorème des bornes atteintes). Ainsi, pour tout $t \geqslant 0$, $|u(t)| \leqslant M + t^p$ (les deux termes sont positifs). Alors, avec 4 et 5 :

$$|L(u)(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} (M + t^p) e^{-xt}\, dt = \frac{M}{x} + \frac{p!}{x^{p+1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} L(u)(x) = 0.}$$

7. Limite en 0.

a) $R(t)$ est le reste d'une intégrale convergente, donc $R(t) \to 0$. Par ailleurs $R(t) =$

$\int_0^{+\infty} u - \int_0^t u$ est continue ; avec $p = 0$, $\frac{R(t)}{t^0} \to 0$.

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} R(t) = 0 \quad \text{et} \quad R \in E.}$$

b) u est continue, donc $t \mapsto \int_0^t u(s)\,ds$ est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée u.

$$\boxed{R \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+) \quad \text{et} \quad R' = -u.}$$

c) Pour $A > 0$, on intègre par parties avec R et $t \mapsto e^{-xt}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$:

$$\int_0^A u(t)e^{-xt}\,dt = -\int_0^A R'(t)e^{-xt}\,dt = R(0) - R(A)e^{-xA} - x\int_0^A R(t)e^{-xt}\,dt.$$

Quand $A \to +\infty$, $R(A)e^{-xA} \to 0$, et la dernière intégrale tend vers $L(R)(x)$ (car $R \in E$).

$$\boxed{L(u)(x) = R(0) - xL(R)(x).}$$

d) Un tel B existe car $R(t) \to 0$. Par c), puis en découpant l'intégrale en B et en utilisant $e^{-xt} \leqslant 1$:

$$|L(u)(x) - R(0)| = x|L(R)(x)| \leqslant x\int_0^B |R(t)|\,dt + x\int_B^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2}e^{-xt}\,dt.$$

La dernière intégrale vaut $\frac{\varepsilon}{2}e^{-xB} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\boxed{|L(u)(x) - R(0)| \leqslant x\int_0^B |R(t)|\,dt + \frac{\varepsilon}{2}.}$$

e) Soit $\varepsilon > 0$, B comme en d) et $K = \int_0^B |R|$. Pour $0 < x \leqslant \frac{\varepsilon}{2(K+1)}$, on a $|L(u)(x) - R(0)| \leqslant \varepsilon$. Comme $R(0) = \int_0^{+\infty} u$:

$$\boxed{\lim_{x\to0} L(u)(x) = \int_0^{+\infty} u(t)\,dt.}$$

8. Transformée d'une dérivée.

a) Comme $u' \in E$, il existe p et A tels que $|u'(s)| \leqslant s^p$ pour $s \geqslant A$ (cf. 6). Alors, pour $t \geqslant A$:

$$|u(t)| = \left|u(A) + \int_A^t u'(s)\,ds\right| \leqslant |u(A)| + \int_0^t s^p\,ds.$$

$$\boxed{\forall t \geqslant A, \quad |u(t)| \leqslant |u(A)| + \frac{t^{p+1}}{p+1}.}$$

b) Pour $t \geqslant \max(A, 1)$, $\frac{|u(t)|}{t^{p+2}} \leqslant \frac{|u(A)|}{t^{p+2}} + \frac{1}{(p+1)t} \to 0$; de plus u est continue.

$$\boxed{u \in E.}$$

c) Par intégration par parties sur $[0, A]$ (u et $t \mapsto e^{-xt}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$) :

$$\int_0^A u'(t)e^{-xt}\,dt = u(A)e^{-xA} - u(0) + x\int_0^A u(t)e^{-xt}\,dt.$$

Or $u(A)e^{-xA} \to 0$ (question 2, car $u \in E$).

$$\boxed{L(u')(x) = -u(0) + xL(u)(x).}$$

9. Dérivées de $L(u)$.

a) u_n est continue et $\frac{u_n(t)}{t^{p+n}} = \frac{u(t)}{t^p} \to 0$.

$$\boxed{u_n \in E.}$$

b) Par la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 : $e^a - 1 - a = \int_0^a (a-s)e^s\,ds$. Pour s entre 0 et a, $e^s \leqslant e^{|a|}$, et $a - s$ garde un signe constant, d'où

$$|e^a - 1 - a| \leqslant e^{|a|}\left|\int_0^a |a-s|\,ds\right| = e^{|a|}\frac{a^2}{2}.$$

$$\boxed{|e^a - 1 - a| \leqslant \frac{a^2}{2}e^{|a|}.}$$

c) On a $\frac{e^{-(x+h)t}-e^{-xt}}{h} + te^{-xt} = \frac{e^{-xt}}{h}(e^{-ht} - 1 + ht)$. Par b) avec $a = -ht$, puis $|h| \leqslant \frac{x}{2}$:

$$\left|\frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} + te^{-xt}\right| \leqslant \frac{e^{-xt}}{|h|}\cdot\frac{h^2t^2}{2}e^{|h|t} = |h|\frac{t^2}{2}e^{-(x-|h|)t}.$$

$$\boxed{\left|\frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} + te^{-xt}\right| \leqslant |h|\frac{t^2}{2}e^{-xt/2}.}$$

Comme $x + h \geqslant \frac{x}{2} > 0$, par linéarité des intégrales convergentes, $\frac{L(u)(x+h)-L(u)(x)}{h} + L(u_1)(x)$ est l'intégrale de $u(t)$ multiplié par la quantité ci-dessus. L'intégrale $\int_0^{+\infty} t^2|u(t)|e^{-xt/2}\,dt$ converge, car $t \mapsto t^2|u(t)|$ appartient à E. Donc :

$$\boxed{\left|\frac{L(u)(x+h) - L(u)(x)}{h} + L(u_1)(x)\right| \leqslant \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} t^2|u(t)|e^{-xt/2}\,dt.}$$

d) Le majorant tend vers 0 quand $h \to 0$.

$$\boxed{L(u) \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et } (L(u))' = -L(u_1).}$$

e) Par récurrence sur n, montrons que $L(u)$ est n fois dérivable et que $(L(u))^{(n)} = (-1)^n L(u_n)$. Si c'est vrai au rang n, comme $u_n \in E$, d) appliqué à u_n (avec $(u_n)_1 = u_{n+1}$) donne que $L(u_n)$ est dérivable, de dérivée $-L(u_{n+1})$. Toutes les dérivées étant dérivables, elles sont continues.

$$\boxed{L(u) \in \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[) \quad \text{et} \quad (L(u))^{(n)} = (-1)^n L(u_n).}$$

Problème 2 – Partie IV – Application à une équation différentielle

$u'' + 5u' + 6u = e^{-t}$, $u(0) = 1$, $u'(0) = -2$.

Corrigé – Problème 2.

10. Transformée de la solution.

a) u' est de classe $\mathcal{C}^1$ et $u'' \in E$, donc $u' \in E$ par 8.b). Puis, u étant de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$u' \in E$, on a $u \in E$. Par 8.c) appliqué deux fois :

$$L(u'') = -u'(0) + xL(u') = -u'(0) + x\big(-u(0) + xL(u)\big).$$

$$\boxed{u \in E \quad \text{et} \quad L(u'')(x) = -xu(0) - u'(0) + x^2 L(u)(x).}$$

b) On applique L (linéaire) à l'équation, avec $L(t \mapsto e^{-t})(x) = \frac{1}{x+1}$ (question 4 avec $a = 1$) :

$$(-x + 2 + x^2 L(u)) + 5(-1 + xL(u)) + 6L(u) = \frac{1}{x+1}.$$

$$\boxed{(x^2 + 5x + 6)L(u)(x) = \frac{1}{x+1} + x + 3.}$$

Comme $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$, on obtient $L(u)(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \frac{1}{x+2}$. Or

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1/2}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1/2}{x+3}.$$

$$\boxed{L(u)(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+3}.}$$

11. Une solution.

D'après la question 4, $t \mapsto \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}$ a exactement cette transformée de Laplace. Posons donc $u(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}$ et vérifions :

- u est de classe $\mathcal{C}^2$;
- $u(0) = 1$ et $u'(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t}$, donc $u'(0) = -2$;
- $u''(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{9}{2}e^{-3t}$, et

$$u'' + 5u' + 6u = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{2} + 3\right)e^{-t} + \left(\tfrac{9}{2} - \tfrac{15}{2} + 3\right)e^{-3t} = e^{-t}.$$

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \text{ est solution du problème.}}$$