

ESSEC

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2015

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Introduction

Introduction – L'espace $F(q)$ et l'opérateur Φ

$$F(q) = \{f \in C^2([0, 1], \mathbb{R}), f'' = qf\} \text{ et } \Phi(f)(t) = \int_0^t (t-u)q(u)f(u) du.$$

Corrigé – Introduction.

1. L'opérateur Φ .

- a) $F(q) \subset C^2 \subset C^0$ contient la fonction nulle. Si $f, g \in F(q)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + g \in C^2$ et, par linéarité de la dérivation, $(\lambda f + g)'' = q(\lambda f + g)$.

$$F(q) \text{ est un sous-espace vectoriel de } C^0([0, 1], \mathbb{R}).$$

- b) Pour $t \in [0, 1]$, $\Phi(f)(t) = t \int_0^t q(u)f(u) du - \int_0^t uq(u)f(u) du$. Les fonctions qf et $u \mapsto uqf(u)$ étant continues, leurs primitives qui s'annulent en 0 sont de classe $\mathcal{C}^1$; donc $\Phi(f)$ est continue. La linéarité de Φ découle de celle de l'intégrale.

$$\Phi \text{ est un endomorphisme de } C^0([0, 1], \mathbb{R}).$$

- c) D'après l'écriture de b), $\Phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$[\Phi(f)]'(t) = \int_0^t qf + tq(t)f(t) - tq(t)f(t) = \int_0^t q(u)f(u) du,$$

qui est encore de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée qf continue.

$$\Phi(f) \in C^2([0, 1], \mathbb{R}), \quad [\Phi(f)]'(t) = \int_0^t q(u)f(u) du, \quad [\Phi(f)]'' = qf.$$

- d) Si $\Phi(f) = f$, alors $f \in C^2$, $f'' = [\Phi(f)]'' = qf$, $f(0) = \Phi(f)(0) = 0$ et $f'(0) = [\Phi(f)]'(0) = 0$.

Réciproquement, si $f \in F(q)$ et $f(0) = f'(0) = 0$, posons $g = \Phi(f) - f$. Alors $g'' = qf - f'' = 0$, donc g est affine ; de plus $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$, donc $g = 0$.

$$(f \in F(q) \text{ et } f(0) = f'(0) = 0) \iff \Phi(f) = f.$$

2. Itérés de Φ .

- a) Récurrence. Pour $n = 0$, $|f_0(t)| \leq \|f_0\|_\infty$. Supposons l'inégalité vraie au rang n . Pour $t \in [0, 1]$ et $u \in [0, t]$, on a $0 \leq t - u \leq 1$, d'où

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(t)| &\leq \int_0^t (t-u) \|q\|_\infty |f_n(u)| du \leq \|q\|_\infty^{n+1} \|f_0\|_\infty \int_0^t \frac{u^n}{n!} du \\ &= \|q\|_\infty^{n+1} \|f_0\|_\infty \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in [0, 1], \quad |f_n(t)| \leq \|q\|_\infty^n \|f_0\|_\infty \frac{t^n}{n!}.$$

- b) Pour tout réel $c \geq 0$, $\frac{c^n}{n!} \rightarrow 0$ (croissances comparées). Avec $c = \|q\|_\infty t$ et par encadrement :

$$\boxed{\forall t \in [0, 1], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = 0.}$$

- c) Si $f \in F(q)$ et $f(0) = f'(0) = 0$, alors $\Phi(f) = f$ par 1.d). Par récurrence, $f_n = f$ pour tout n , donc $f(t) = \lim f_n(t) = 0$.

$$\boxed{f = 0.}$$

- d) Δ est linéaire, et son noyau est $\{f \in F(q), f(0) = f'(0) = 0\} = \{0\}$ d'après c). Δ est donc injective, et $F(q)$ est isomorphe à $\text{Im } \Delta \subset \mathbb{R}^2$.

$$\boxed{\Delta \text{ est linéaire et injective, donc } \dim F(q) \leq 2.}$$

Partie I – L'espace $E_a(\omega)$ **Partie I – Propriétés de $E_a(\omega)$**

$$E_a(\omega) = \{f \in C^2, f'' = -a\omega f, f(0) = f(1) = 0\} \text{ et } \langle f | g \rangle = \int_0^1 f g \omega.$$

Corrigé – Partie I.**3. Premières propriétés.**

- a) $E_a(\omega) = F(-a\omega) \cap \{f, f(0) = f(1) = 0\}$ est l'intersection d'un sous-espace vectoriel et du noyau de l'application linéaire $f \mapsto (f(0), f(1))$.

$$\boxed{E_a(\omega) \text{ est un sous-espace vectoriel de } C^0([0, 1], \mathbb{R}).}$$

- b) Si $a = 0$, $f'' = 0$, donc f est affine, et $f(0) = f(1) = 0$ impose $f = 0$.

$$\boxed{E_0(\omega) = \{0\}.$$

4. Le cas $\omega = 1$.

- a) Soit $c = \sqrt{-a} > 0$. Les fonctions $t \mapsto e^{\pm ct}$ vérifient $f'' = c^2 f = -af$, donc appartiennent à $F(-a)$. Elles sont libres (leur quotient n'est pas constant), et

$\dim F(-a) \leq 2$ par 2.d). Donc $F(-a) = \text{Vect}(e^{ct}, e^{-ct})$. Si $f = \alpha e^{ct} + \beta e^{-ct} \in E_a(1)$, alors $f(0) = 0$ donne $\beta = -\alpha$, puis $f(1) = \alpha(e^c - e^{-c}) = 0$ donne $\alpha = 0$ (car $c \neq 0$).

$$\boxed{\text{Pour } a < 0, \quad E_a(1) = \{0\}.$$

b) Soit $c = \sqrt{a} > 0$. Les fonctions $\cos(ct)$ et $\sin(ct)$ vérifient $f'' = -c^2 f$, donc appartiennent à $F(-a)$. Elles sont libres : si $\alpha \cos(ct) + \beta \sin(ct) = 0$, l'évaluation en 0 donne $\alpha = 0$, puis $\beta = 0$ (car $\sin(ct) \neq 0$ pour $t > 0$ petit). Donc $F(-a) = \text{Vect}(\cos(ct), \sin(ct))$.

Si $f = \alpha \cos(ct) + \beta \sin(ct) \in E_a(1)$, alors $f(0) = 0$ donne $\alpha = 0$, et $f(1) = \beta \sin c = 0$. Or $\sin c = 0 \iff c \in \pi \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $\frac{\sqrt{a}}{\pi} \in \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\text{Pour } a > 0 : \quad E_a(1) = \text{Vect}(t \mapsto \sin(\sqrt{a}t)) \text{ si } \frac{\sqrt{a}}{\pi} \in \mathbb{N}^*, \quad E_a(1) = \{0\} \text{ sinon.}$$

5. Dimension de $E_a(\omega)$.

$E_a(\omega) \subset F(-a\omega)$, et la restriction de Δ à $E_a(\omega)$ est linéaire et injective (2.d). Son image est contenue dans $\{0\} \times \mathbb{R}$, puisque $f(0) = 0$ pour $f \in E_a(\omega)$.

$$\boxed{\dim E_a(\omega) \leq \dim(\{0\} \times \mathbb{R}) = 1.}$$

6. Signe de a .

Soit $f \in E_a(\omega)$ non nulle. f et f' sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$; par intégration par parties :

$$\int_0^1 (f'(t))^2 dt = [f(t)f'(t)]_0^1 - \int_0^1 f(t)f''(t) dt = 0 + a \int_0^1 \omega(t)f(t)^2 dt.$$

Comme $f \neq 0$ et $f(0) = 0$, f' n'est pas identiquement nulle, donc $\int_0^1 f'^2 > 0$ (intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle). De même, $\int_0^1 \omega f^2 > 0$.

$$\boxed{a = \frac{\int_0^1 f'^2}{\int_0^1 \omega f^2} > 0.}$$

7. Produit scalaire.

L'application est bien définie (fonctions continues sur un segment), bilinéaire, symétrique, et positive car $\omega > 0$. Si $\int_0^1 f^2 \omega = 0$, la fonction continue et positive $f^2 \omega$ est nulle, donc $f = 0$ puisque $\omega > 0$.

$$\boxed{\langle \cdot | \cdot \rangle \text{ est un produit scalaire sur } C^0([0, 1], \mathbb{R}).}$$

8. Orthogonalité.

Soient $f \in E_a(\omega)$ et $g \in E_b(\omega)$. Par intégration par parties, avec $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = 0$:

$$\int_0^1 f''g = [f'g]_0^1 - \int_0^1 f'g' = - \int_0^1 f'g' = \int_0^1 fg''.$$

Donc $-a\langle f | g \rangle = -b\langle f | g \rangle$, soit $(a - b)\langle f | g \rangle = 0$, et $a \neq b$.

$$\boxed{E_a(\omega) \perp E_b(\omega) \quad (a \neq b).}$$

Partie II – L'exemple $\omega = 1$

Partie II – Un endomorphisme de $G = \text{Vect}(\psi_1, \dots, \psi_p)$

$$\psi_k(t) = \sqrt{2} \sin(k\pi t) \text{ et } u(g) = 2 \cos(\pi t)g - \langle g | \psi_p \rangle \psi_{p+1}.$$

Corrigé – Partie II.

9. La famille (ψ_k) .

a) ψ_k est de classe $\mathcal{C}^2$, $\psi_k'' = -k^2\pi^2\psi_k$, et $\psi_k(0) = \psi_k(1) = 0$.

$$\psi_k \in E_{k^2\pi^2}(1).$$

b) On a $2 \sin(k\pi t) \sin(l\pi t) = \cos((k-l)\pi t) - \cos((k+l)\pi t)$. Comme $k+l \geq 2$, $\int_0^1 \cos((k+l)\pi t) dt = 0$; et $\int_0^1 \cos((k-l)\pi t) dt$ vaut 1 si $k=l$, 0 sinon.

$$\langle \psi_k | \psi_l \rangle = \delta_{k,l}.$$

c) La famille $\mathcal{C}$ est orthonormée (b), donc libre, et elle engendre G .

$$\mathcal{C} \text{ est une base orthonormée de } G.$$

10. L'endomorphisme u .

a) Comme $2 \cos(\pi t) \sin(k\pi t) = \sin((k+1)\pi t) + \sin((k-1)\pi t)$, on a $2 \cos(\pi t)\psi_k = \psi_{k+1} + \psi_{k-1}$ (avec $\psi_0 = 0$). De plus $\int_0^1 \psi_k \psi_p = \delta_{k,p}$, d'où

$$u(\psi_k) = \psi_{k+1} + \psi_{k-1} \quad (1 \leq k \leq p-1), \quad u(\psi_p) = \psi_{p+1} + \psi_{p-1} - \psi_{p+1} = \psi_{p-1}.$$

u est linéaire (linéarité de l'intégrale) et envoie la base $\mathcal{C}$ dans G .

$$u \text{ est un endomorphisme de } G.$$

b)

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(des 1 sur les deux diagonales voisines de la diagonale principale, des 0 ailleurs). Cette matrice est symétrique réelle ; d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable.

$$u \text{ est diagonalisable.}$$

11. Localisation des valeurs propres.

a) Pour $g \in G$, $\psi_{p+1} \perp G$ d'après 9.b), donc $\langle g | \psi_{p+1} \rangle = 0$.

$$\langle g | u(g) \rangle = 2 \int_0^1 \cos(\pi t) g^2(t) dt.$$

b) Soit g un vecteur propre associé à λ , avec $\|g\|_2 = 1$. Alors

$$\lambda = \langle g | u(g) \rangle = 2 \int_0^1 \cos(\pi t) g^2(t) dt \in \left[-2 \int_0^1 g^2, 2 \int_0^1 g^2 \right] = [-2, 2].$$

Si $\lambda = 2$, alors $\int_0^1 (1 - \cos(\pi t)) g^2(t) dt = 0$. Cette fonction continue et positive est donc nulle ; comme $1 - \cos(\pi t) > 0$ sur $]0, 1[$, g est nulle sur $]0, 1[$, puis sur $[0, 1]$ par continuité. C'est absurde. On raisonne de même pour $\lambda = -2$ avec $1 + \cos(\pi t) > 0$ sur $[0, 1[$.

$$\lambda \in]-2, 2[.$$

12. Éléments propres de u .

a) D'après 10.a), et en utilisant $x_0 = x_{p+1} = 0$:

$$u(\psi) = \sum_{k=1}^p x_k (\psi_{k+1} + \psi_{k-1}) - x_p \psi_{p+1} = \sum_{j=1}^p (x_{j-1} + x_{j+1}) \psi_j.$$

On identifie avec $\lambda \psi = \sum 2 \cos(\theta) x_j \psi_j$ dans la base $\mathcal{C}$.

$$\forall k \in \{1, \dots, p\}, \quad x_{k+1} - 2 \cos(\theta) x_k + x_{k-1} = 0.$$

b) Pour tous réels A et B , la suite $y_k = A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta)$ vérifie la même relation, d'après les formules

$$\cos((k+1)\theta) + \cos((k-1)\theta) = 2 \cos \theta \cos(k\theta),$$

$$\sin((k+1)\theta) + \sin((k-1)\theta) = 2 \cos \theta \sin(k\theta).$$

Comme $\theta \in]0, \pi[$, $\sin \theta \neq 0$; on choisit $A = x_0$ et $B = \frac{x_1 - x_0 \cos \theta}{\sin \theta}$, de sorte que $y_0 = x_0$ et $y_1 = x_1$. La relation de a) détermine x_{k+1} à partir de x_k et x_{k-1} ; par récurrence (double), $x_k = y_k$ pour tout $k \in \{0, \dots, p+1\}$.

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall k \in \{0, \dots, p+1\}, \\ x_k = A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta).$$

c) $x_0 = 0$ donne $A = 0$. Alors $B \neq 0$, sinon $\psi = 0$; et $x_{p+1} = B \sin((p+1)\theta) = 0$ impose $(p+1)\theta \in \pi\mathbb{Z}$. Comme $(p+1)\theta \in]0, (p+1)\pi[$:

$$A = 0 \quad \text{et} \quad \theta = \frac{s\pi}{p+1} \quad \text{avec} \quad s \in \{1, \dots, p\}.$$

d) Ainsi $\text{Sp}(u) \subset \{2 \cos \frac{s\pi}{p+1}, 1 \leq s \leq p\}$. Réciproquement, pour $s \in \{1, \dots, p\}$ et $\theta_s = \frac{s\pi}{p+1}$, la suite $x_k = \sin(k\theta_s)$ vérifie $x_0 = x_{p+1} = 0$ et la relation de a). Le calcul de a), lu à l'envers, montre que $\Psi_s = \sum_{k=1}^p \sin(k\theta_s) \psi_k$ vérifie $u(\Psi_s) = 2 \cos(\theta_s) \Psi_s$, et $\Psi_s \neq 0$ car $x_1 = \sin \theta_s \neq 0$. Les p valeurs $2 \cos \theta_s$ sont distinctes ($\cos$ est strictement décroissante sur $]0, \pi[$). Les Ψ_s , vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, forment une famille libre de p vecteurs, donc une base de G .

$$\text{Sp}(u) = \left\{ 2 \cos \frac{s\pi}{p+1}, 1 \leq s \leq p \right\}$$

$$\left(\sum_{k=1}^p \sin \frac{k s \pi}{p+1} \psi_k \right)_{1 \leq s \leq p} \quad \text{est une base de vecteurs propres de } u.$$

Partie III – L'hypothèse (H_ω)

Partie III – L'hypothèse (H_ω) n'est jamais réalisée

Questions 13 à 18.

Corrigé – Partie III.

13. Le cas $\omega = 1$.

D'après 3.b), 4 et 6, $E_a(1) \neq \{0\}$ si et seulement si $a = k^2\pi^2$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Une suite (a_n) deux à deux distincts de cette forme correspond à des entiers k_n deux à deux distincts. Une telle suite d'entiers n'est pas bornée (il n'y a qu'un nombre fini d'entiers dans un intervalle borné), donc (a_n) non plus.

(H_1) n'est pas vérifiée.

14. Normalisation.

Pour tout n , il existe $g_n \in E_{a_n}(\omega)$ non nulle. On pose $f_n = \frac{g_n}{\|g_n\|_2}$ (la norme est non nulle d'après 7). Comme $E_{a_n}(\omega)$ est un sous-espace vectoriel, f_n lui appartient, et $\|f_n\|_2 = 1$.

Une telle suite (f_n) existe.

15. Inégalité de Bessel.

- a) Les a_n étant deux à deux distincts, la famille (f_n) est orthonormée pour $\langle \cdot | \cdot \rangle$ (8 et 14), et $c_k(\varphi) = \langle f_k | \varphi \rangle$.

$S_n(\varphi)$ est le projeté orthogonal de φ sur $\text{Vect}(f_0, \dots, f_n)$.

- b) Par orthonormalité (théorème de Pythagore), $\|S_n(\varphi)\|_2^2 = \sum_{k=0}^n c_k(\varphi)^2$. Comme $\varphi - S_n(\varphi) \perp S_n(\varphi)$, on a $\|\varphi\|_2^2 = \|S_n(\varphi)\|_2^2 + \|\varphi - S_n(\varphi)\|_2^2 \geq \|S_n(\varphi)\|_2^2$.

$$\|S_n(\varphi)\|_2^2 = \sum_{k=0}^n c_k(\varphi)^2 \leq \|\varphi\|_2^2.$$

- c) Série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées :

$\sum c_n(\varphi)^2$ converge.

- d) Le terme général d'une série convergente tend vers 0, donc $c_n(\varphi) \rightarrow 0$. Ensuite, $f_n'' = -a_n \omega f_n$, d'où $\left| \int_0^1 f_n'' \varphi \right| = a_n |c_n(\varphi)| \leq a |c_n(\varphi)| \rightarrow 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n \varphi \omega = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n'' \varphi = 0.$$

16. Majorations uniformes.

- a) Les deux expressions sont continues sur $[0, x]$ et sur $]x, 1]$, et toutes deux tendent vers $x(x-1)$ en x .

$\varphi_x \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

- b) f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ et $f_n(0) = 0$; la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 s'écrit :

$$f_n(x) = x f'_n(0) + \int_0^x (x-t) f''_n(t) dt.$$

Avec $x = 1$ et $f_n(1) = 0$:

$$f'_n(0) = - \int_0^1 (1-t) f''_n(t) dt.$$

- c) En reportant :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_0^x (x-t-x(1-t)) f''_n(t) dt - \int_x^1 x(1-t) f''_n(t) dt \\ &= \int_0^x t(x-1) f''_n(t) dt + \int_x^1 x(t-1) f''_n(t) dt. \end{aligned}$$

$$f_n(x) = \int_0^1 \varphi_x(t) f''_n(t) dt.$$

Par 15.d) avec $\varphi = \varphi_x$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

- d) Comme $f''_n = -a_n \omega f_n$, on a $f_n(x) = -a_n \int_0^1 \varphi_x f_n \omega = -a_n \langle \varphi_x | f_n \rangle$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, avec $\|f_n\|_2 = 1$ et $0 < a_n \leq a$:

$$|f_n(x)| \leq a \|\varphi_x\|_2.$$

- e) $\int_0^1 \varphi_x^2 = (x-1)^2 \frac{x^3}{3} + x^2 \frac{(1-x)^3}{3} = \frac{x^2(1-x)^2}{3}$. Donc $\|\varphi_x\|_2^2 \leq \|\omega\|_\infty \frac{x^2(1-x)^2}{3}$.

$$\int_0^1 \varphi_x(t)^2 dt = \frac{x^2(1-x)^2}{3}, \quad |f_n(x)| \leq ax(1-x) \sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}.$$

- f) Avec $h : t \mapsto 1-t$, b) donne $f'_n(0) = a_n \int_0^1 (1-t) \omega f_n = a_n \langle h | f_n \rangle$. Par Cauchy-Schwarz, $|f'_n(0)| \leq a \|h\|_2$, et $\|h\|_2^2 \leq \|\omega\|_\infty \int_0^1 (1-t)^2 dt = \frac{\|\omega\|_\infty}{3}$.

$$|f'_n(0)| \leq a \sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}.$$

- g) f'_n est de classe $\mathcal{C}^1$, donc $f'_n(x) = f'_n(0) + \int_0^x f''_n = f'_n(0) - a_n \int_0^x \omega f_n$. Par e) et $t(1-t) \leq \frac{1}{4}$:

$$\left| a_n \int_0^x \omega f_n \right| \leq a \|\omega\|_\infty \int_0^1 |f_n(t)| dt \leq a \|\omega\|_\infty \cdot \frac{a}{4} \sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}.$$

$$|f'_n(x)| \leq a \sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}} \left(1 + \frac{a}{4} \|\omega\|_\infty \right).$$

17. Les f_n sont C -lipschitziennes.

Par 16.g), $|f'_n| \leq C$ sur $[0, 1]$ pour tout n . D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq C|x - y|.$$

18. Convergence uniforme et conclusion.

- a) Pour chaque $k \in \{0, \dots, N\}$, $f_n(\alpha_k) \rightarrow 0$ (16.c), donc il existe p_k tel que $|f_n(\alpha_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour $n \geq p_k$. On prend $p = \max(p_0, \dots, p_N)$ (nombre fini d'indices).

$$\boxed{\exists p, \forall n \geq p, \forall k, |f_n(\alpha_k)| < \frac{\varepsilon}{2}.}$$

- b) Pour $n \geq p$, par 17 et $|x - \alpha_k| \leq \frac{1}{N} \leq \frac{\varepsilon}{2C}$:

$$|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f_n(\alpha_k)| + |f_n(\alpha_k)| < C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\boxed{\forall n \geq p, |f_n(x)| < \varepsilon.}$$

- c) p ne dépend pas de x , donc $\|f_n\|_\infty < \varepsilon$ pour $n \geq p$ (le maximum est atteint en un point de $[0, 1]$).

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty = 0.}$$

- d) $0 \leq \int_0^1 f_n^2 \omega \leq \|f_n\|_\infty^2 \|\omega\|_\infty \rightarrow 0$. Or $\int_0^1 f_n^2 \omega = 1$ pour tout n (14) : c'est une contradiction.

Pour toute fonction ω continue et strictement positive,
l'hypothèse (H_ω) n'est jamais réalisée.