

ESSEC

Mathématiques

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2015

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1	Introduction	2
	<i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; intégrales ; espaces vectoriels.</i>	2
2	L'espace $E_a(\omega)$	2
	<i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; intégrales ; espaces vectoriels ; algèbre bilinéaire.</i>	2
3	L'exemple $\omega = 1$	3
	<i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; intégrales ; espaces vectoriels ; réduction.</i>	3
4	L'hypothèse (H_ω)	4
	<i>Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; suites ; intégrales ; convergences de variables.</i>	4

Dans tout le problème, on adopte les notations suivantes. On note $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout entier $k \geq 1$, $C^k([0, 1], \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et dont les dérivées successives jusqu'à l'ordre k sont continues.

Si $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, on note $\|f\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|$. Si $q \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, on pose

$$F(q) = \left\{ f \in C^2([0, 1], \mathbb{R}) \mid \forall t \in [0, 1], f''(t) = q(t)f(t) \right\}.$$

1 Introduction

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; intégrales ; espaces vectoriels.

1. a) Montrer que $F(q)$ est un sous-espace vectoriel de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.
- b) Pour toute fonction f de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$, on définit la fonction $\Phi(f)$ par

$$\Phi(f) : t \in [0, 1] \mapsto \int_0^t (t-u)q(u)f(u) du.$$

Vérifier que l'application Φ , qui à f associe $\Phi(f)$, est un endomorphisme de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

- c) Montrer que $\Phi(f)$ appartient à $C^2([0, 1], \mathbb{R})$ et calculer $[\Phi(f)]'$ et $[\Phi(f)]''$.
- d) En déduire que, pour toute fonction f de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$, $f \in F(q)$ et vérifie $f(0) = f'(0) = 0$ si et seulement si $\Phi(f) = f$.
2. Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $f_0 = f$ et, pour tout entier naturel, $f_{n+1} = \Phi(f_n)$.
 - a) Montrer que, pour tout $t \in [0, 1]$, $|f_n(t)| \leq \|q\|_\infty^n \|f_0\|_\infty \frac{t^n}{n!}$.
 - b) En déduire que, pour tout $t \in [0, 1]$, la suite $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
 - c) Montrer alors que si $f \in F(q)$ vérifie $f(0) = f'(0) = 0$, alors f est nulle.
 - d) Montrer que l'application $\Delta : F(q) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f \mapsto (f(0), f'(0))$, est linéaire et injective. Que peut-on en déduire pour la dimension de $F(q)$?

2 L'espace $E_a(\omega)$

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; intégrales ; espaces vectoriels ; algèbre bilinéaire.

Soient ω une fonction continue sur $[0, 1]$, à valeurs réelles strictement positives, et $a \in \mathbb{R}$. On note

$$E_a(\omega) = \left\{ f \in C^2([0, 1], \mathbb{R}) \mid \forall t \in [0, 1], f''(t) = -a\omega(t)f(t) \text{ et } f(0) = f(1) = 0 \right\}.$$

3. a) Montrer que $E_a(\omega)$ est un sous-espace vectoriel de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.
- b) Dans le cas $a = 0$, décrire $E_0(\omega)$.
4. On suppose $\omega = 1$.
 - a) Pour $a < 0$, remarquer que $t \mapsto \exp(\sqrt{-a}t)$ et $t \mapsto \exp(-\sqrt{-a}t)$ appartiennent à $F(-a)$. En déduire $E_a(1)$ pour $a < 0$.

- b) Pour $a > 0$, remarquer que $t \mapsto \cos(\sqrt{a}t)$ et $t \mapsto \sin(\sqrt{a}t)$ appartiennent à $F(-a)$. Décrire $E_a(1)$ pour $a > 0$, en discutant suivant la nature du nombre réel $\sqrt{a}/\pi$.
5. Dans le cas général, montrer que $\dim(E_a(\omega)) \leq 1$. On pourra utiliser de nouveau l'application Δ .
6. Montrer que si $E_a(\omega) \neq \{0\}$, alors $a > 0$. On pourra introduire $\int_0^1 (f'(t))^2 dt$.
7. Lorsque f et g sont deux fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on pose

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\omega(t) dt.$$

Vérifier que cela définit un produit scalaire sur $C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Dans toute la suite du problème, cet espace est muni de ce produit scalaire et, pour $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, on note $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f | f \rangle} = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2 \omega(t) dt}$.

8. Si a et b sont deux nombres réels distincts, montrer que $E_a(\omega)$ et $E_b(\omega)$ sont orthogonaux.

3 L'exemple $\omega = 1$

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; intégrales ; espaces vectoriels ; réduction.

Dans cette partie, ω est la fonction constante égale à 1 et $p \geq 2$. Pour tout entier naturel non nul k , on note ψ_k la fonction définie par $\psi_k(t) = \sqrt{2} \sin(k\pi t)$ pour $t \in [0, 1]$.

9. a) Vérifier qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $\psi_k \in E_a(1)$.
 b) Pour tout $(k, l) \in (\mathbb{N}^*)^2$, calculer $\langle \psi_k | \psi_l \rangle = \int_0^1 \psi_k(t)\psi_l(t) dt$.
 c) On note G le sous-espace vectoriel de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ engendré par $(\psi_1, \dots, \psi_p)$. Vérifier que $\mathcal{C} = (\psi_1, \dots, \psi_p)$ est une base orthonormée de G .
10. Pour $g \in G$, on définit $u(g)$ par, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$(u(g))(t) = 2 \cos(\pi t)g(t) - \left(\int_0^1 g(x)\psi_p(x) dx \right) \psi_{p+1}(t).$$

- a) Montrer que $u : g \mapsto u(g)$ est un endomorphisme de G .
 b) Écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{C}$. Justifier que u est diagonalisable.
11. a) Vérifier que, pour $g \in G$, $\langle g | u(g) \rangle = 2 \int_0^1 \cos(\pi t)g^2(t) dt$.
 b) Soit λ une valeur propre de u . Montrer d'abord que $\lambda \in [-2, 2]$, puis que λ ne vaut ni 2 ni -2.
12. Soit λ une valeur propre de u et $\theta \in]0, \pi[$ tel que $\lambda = 2 \cos(\theta)$. On note ψ un vecteur propre associé. Il existe un p -uplet $(x_1, \dots, x_p)$ tel que $\psi = \sum_{k=1}^p x_k \psi_k$. On pose $x_0 = x_{p+1} = 0$.
 a) Vérifier que, pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, $x_{k+1} - 2 \cos(\theta)x_k + x_{k-1} = 0$.
 b) En déduire l'existence d'un couple $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $k \in \{0, \dots, p+1\}$, $x_k = A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta)$.
 c) Justifier que $A = 0$ et qu'il existe $s \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\theta = \frac{s\pi}{p+1}$.
 d) En déduire les valeurs propres de u et une base de vecteurs propres de u .

4 L'hypothèse (H_ω)

Thèmes abordés : fonctions d'une variable ; suites ; intégrales ; convergences de variables.

On revient au cas général : ω est une fonction continue sur $[0, 1]$, à valeurs réelles strictement positives. On note (H_ω) l'hypothèse : il existe une suite bornée $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, deux à deux distincts, telle que, pour tout entier n , $E_{a_n}(\omega)$ ne soit pas réduit à $\{0\}$.

13. L'hypothèse (H_ω) est-elle vérifiée si $\omega = 1$? Justifier.

On se propose de démontrer, par l'absurde, que cette hypothèse n'est jamais réalisée. On suppose donc qu'il existe une fonction ω continue sur $[0, 1]$, à valeurs réelles strictement positives, telle que (H_ω) soit réalisée. On note a un réel positif et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels deux à deux distincts tels que, pour tout n , $E_{a_n}(\omega) \neq \{0\}$ et $0 < a_n \leq a$.

14. Justifier l'existence d'une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in E_{a_n}(\omega)$ et $\int_0^1 (f_n(t))^2 \omega(t) dt = 1$. Une telle suite est fixée jusqu'à la fin du problème.

15. Soit $\varphi \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$c_n(\varphi) = \int_0^1 f_n(t) \varphi(t) \omega(t) dt \quad \text{et} \quad S_n(\varphi) = \sum_{k=0}^n c_k(\varphi) f_k.$$

- Que représente $S_n(\varphi)$?
- Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|S_n(\varphi)\|_2^2 = \sum_{k=0}^n (c_k(\varphi))^2$ et $\sum_{k=0}^n (c_k(\varphi))^2 \leq \|\varphi\|_2^2$.
- Que peut-on dire de la série $\sum_{n \geq 0} (c_n(\varphi))^2$?
- En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) \varphi(t) \omega(t) dt = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) \varphi(t) dt = 0$.

16. Soit $x \in [0, 1]$. On définit la fonction φ_x par

$$\varphi_x(t) = \begin{cases} t(x-1) & \text{si } t \in [0, x], \\ x(t-1) & \text{si } t \in]x, 1]. \end{cases}$$

- Vérifier que $\varphi_x \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$.
- Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à f_n à l'ordre 1 entre 0 et x .
Vérifier que $f_n(x) = x f'_n(0) + \int_0^x (x-t) f''_n(t) dt$, puis que $f'_n(0) = - \int_0^1 (1-t) f''_n(t) dt$.
- En déduire $f_n(x) = \int_0^1 \varphi_x(t) f''_n(t) dt$ et conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.
- Remarquer que $f_n(x) = -a_n \langle \varphi_x | f_n \rangle$, puis en déduire $|f_n(x)| \leq a \|\varphi_x\|_2$.
- Calculer $\int_0^1 (\varphi_x(t))^2 dt$, puis en déduire $|f_n(x)| \leq ax(1-x) \sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}$.
- Justifier $|f'_n(0)| \leq a \sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}}$.
- Rappeler pourquoi $f'_n(x) = f'_n(0) - a_n \int_0^x \omega(t) f_n(t) dt$ et en déduire

$$|f'_n(x)| \leq a \sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}} \left(1 + \frac{a}{4} \|\omega\|_\infty \right).$$

17. On note $C = a \sqrt{\frac{\|\omega\|_\infty}{3}} \left(1 + \frac{a}{4} \|\omega\|_\infty \right)$, nombre réel strictement positif. Déduire des questions précédentes que, pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x) - f_n(y)| \leq C|x - y|$.

18. Soit $\varepsilon > 0$. Choisir $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N} \leq \frac{\varepsilon}{2C}$ et poser, pour $k \in \{0, \dots, N\}$, $\alpha_k = \frac{k}{N}$.
- a) Justifier qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq p$ et tout $k \in \{0, \dots, N\}$, $|f_n(\alpha_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$.
 - b) Soit $x \in [0, 1]$. En introduisant $k \in \{0, \dots, N-1\}$ tel que $x \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, montrer que, pour tout $n \geq p$, $|f_n(x)| < \varepsilon$.
 - c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty = 0$.
 - d) Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (f_n(t))^2 \omega(t) dt = 0$ et conclure.