HEC Paris – ESSEC

Mathématiques approfondies – Mathématiques I

Corrigé du sujet adapté – 2015

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Partie I – Deux exemples de pilotage linéaire

Partie I – Équilibres attractifs de systèmes différentiels linéaires

Questions 1 à 3.

Corrigé – Partie I.

1. Le cas $p = 1$.

a) La fonction $y : t \mapsto \left(x(t) + \frac{b}{a}\right) e^{-at}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$y'(t) = x'(t)e^{-at} - a\left(x(t) + \frac{b}{a}\right) e^{-at} = (ax(t) + b - ax(t) - b)e^{-at}.$$

$$\boxed{\forall t \geqslant 0, \quad y'(t) = 0.}$$

b) y est de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, donc constante : $y(t) = y(0) = x(0) + \frac{b}{a}$. En multipliant par e^{at} :

$$\boxed{\forall t \geqslant 0, \quad x(t) = -\frac{b}{a} + \left(x(0) + \frac{b}{a}\right) e^{at}.}$$

c) Un équilibre est un réel x^* tel que $ax^* + b = 0$; comme $a \neq 0$, il y en a un seul : $x^* = -\frac{b}{a}$. D'après b), toute solution s'écrit $x(t) = x^* + (x(0) - x^*)e^{at}$, et réciproquement, pour tout réel x_0, la fonction $t \mapsto x^* + (x_0 - x^*)e^{at}$ est pilotée par (a, b).

- Si $a < 0$, $e^{at} \to 0$ donc toute solution tend vers x^*.
- Si $a > 0$, la solution $t \mapsto x^* + e^{at}$ tend vers $+\infty$, donc x^* n'est pas attractif.

$$\boxed{x^* = -\frac{b}{a} \text{ est l'unique équilibre, et il est attractif si et seulement si } a < 0.}$$

2. Exemple 1.

a) On cherche X^* tel que $AX^* = -B$. Or $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = -B$. De plus A est inversible : si $AX = 0$, alors $x_2 = 2x_1$ et $x_1 = 2x_2$, d'où $x_1 = 4x_1$, donc $X = 0$. L'équilibre est donc unique.

$$\boxed{x^* = (1, 1).}$$

b) A est symétrique réelle. D'après le théorème spectral, elle est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres ; la matrice de passage Q de la base canonique vers cette base est orthogonale, donc $Q^{-1} = {}^tQ$.

$$\boxed{\exists Q \text{ inversible, } Q^{-1} = {}^tQ \text{ et } Q^{-1}AQ \text{ diagonale.}}$$

c) $A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ forment une base orthonormée de vecteurs propres associés à -3 et -1.

$$\boxed{\lambda = -3, \quad \mu = -1, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = {}^tQ, \quad Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix}-3 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}.}$$

d) Par linéarité de la dérivation, $W'(t) = {}^tQX'(t) = {}^tQAX(t) + {}^tQB$. Comme $Q\,{}^tQ = I_2$ et ${}^tQAQ = D$:

$$\boxed{W'(t) = {}^tQAQ\,{}^tQX(t) + {}^tQB = DW(t) + {}^tQB.}$$

Ici ${}^tQB = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$, donc $w_1' = -3w_1$ et $w_2' = -w_2 + \sqrt{2}$. D'après la question 1 (avec $a = -3 < 0$, puis $a = -1 < 0$), $w_1(t) \to 0$ et $w_2(t) \to \sqrt{2}$. Ainsi

$$X(t) = QW(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} Q\begin{pmatrix}0\\\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = X^*.$$

$$\boxed{\text{L'équilibre } x^* = (1,1) \text{ est attractif.}}$$

3. Exemple 2.

a) *M est inversible.* Soit $X = (x_1, x_2, x_3)$ tel que $MX = 0$. En sommant les trois équations, on obtient $(\alpha + \beta - 1)(x_1 + x_2 + x_3) = 0$, donc $x_3 = -x_1 - x_2$ car $\alpha + \beta \neq 1$. En reportant dans les deux premières équations :

$$-(1+\beta)x_1 + (\alpha - \beta)x_2 = 0, \qquad (\beta - \alpha)x_1 - (1+\alpha)x_2 = 0.$$

La première donne $x_1 = \frac{\alpha-\beta}{1+\beta}x_2$. La seconde devient alors $-\frac{(\alpha-\beta)^2+(1+\alpha)(1+\beta)}{1+\beta}\,x_2 = 0$, dont le coefficient est < 0. Donc $x_2 = 0$, puis $x_1 = x_3 = 0$.
Un équilibre vérifie $MX^* = -C$, donc il en existe au plus un. Or $MC = (\alpha+\beta-1)C$ (chaque ligne de M a pour somme $\alpha + \beta - 1$). Ainsi $X^* = \frac{1}{1-\alpha-\beta}C$ convient.

$$\boxed{x^* = \frac{1}{1-\alpha-\beta}(1,1,1).}$$

b) On a $X'(t) = (\alpha + \beta - 1)e^{(\alpha+\beta-1)t}C$. Par ailleurs, $MX(t) + C = MX^* + C + e^{(\alpha+\beta-1)t}MC = 0 + (\alpha + \beta - 1)e^{(\alpha+\beta-1)t}C$. Donc x est pilotée par (M, c).
Si x^* est attractif, alors $x(t) - x^* = e^{(\alpha+\beta-1)t}c \to 0$, ce qui impose $\alpha + \beta - 1 < 0$ (si $\alpha + \beta > 1$, cette quantité tend vers l'infini).

$$\boxed{\text{Condition nécessaire : } \alpha + \beta < 1.}$$

c) Notons J la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Alors

$$N = {}^tM + M = \begin{pmatrix} -2 & \alpha+\beta & \alpha+\beta \\ \alpha+\beta & -2 & \alpha+\beta \\ \alpha+\beta & \alpha+\beta & -2 \end{pmatrix} = (\alpha+\beta)J - (2+\alpha+\beta)I_3.$$

J est de rang 1, donc 0 est valeur propre de J avec un sous-espace propre de dimension 2 (théorème du rang) ; de plus $J(1,1,1)^T = 3(1,1,1)^T$. Comme J est symétrique, elle est diagonalisable, et $\mathrm{Sp}(J) = \{0, 3\}$. On en déduit les valeurs propres de N : $3(\alpha+\beta) - (2+\alpha+\beta) = 2(\alpha+\beta-1)$ et $-(2+\alpha+\beta)$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(N) = \{2(\alpha+\beta-1),\ -(2+\alpha+\beta)\}.}$$

Posons $\theta = 1-\alpha-\beta > 0$. Alors $2(\alpha+\beta-1) = -2\theta$, et $-(2+\alpha+\beta) \leqslant -2+2(\alpha+\beta) = -2\theta$ car $3(\alpha+\beta) \geqslant 0$.

$$\boxed{\theta = 1-\alpha-\beta \text{ convient.}}$$

d) (i) $Y'(t) = X'(t) = MX(t) + C = M(Y(t) + X^*) + C = MY(t) + (MX^* + C) = MY(t)$.

$$\boxed{y \text{ est pilotée par } (M, 0).}$$

(ii) On a $\varphi(t) = e^{2\theta t}\,{}^tY(t)Y(t)$, dérivable comme produit. De plus $({}^tYY)' = 2\,{}^tYY' = 2\,{}^tYMY = {}^tY({}^tM + M)Y$, car ${}^tYMY$ est un réel, donc égal à sa transposée ${}^tY\,{}^tMY$. Ainsi

$$\boxed{\varphi'(t) = e^{2\theta t}(2\theta\,{}^tYY + {}^tYNY) = e^{2\theta t}\,{}^tY(t)(N + 2\theta I_3)Y(t).}$$

(iii) $N + 2\theta I_3$ est symétrique réelle, de valeurs propres $\mu + 2\theta \leqslant 0$ pour $\mu \in \mathrm{Sp}(N)$. D'après le théorème spectral, il existe P orthogonale telle que $N + 2\theta I_3 = P\Delta\,{}^tP$, avec $\Delta = \mathrm{diag}(d_1, d_2, d_3)$ et $d_i \leqslant 0$. En posant $V = {}^tPY$, on obtient ${}^tY(N + 2\theta I_3)Y = \sum d_i v_i^2 \leqslant 0$.

$$\boxed{\varphi' \leqslant 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+,\ \text{donc } \varphi \text{ est décroissante.}}$$

(iv) Pour $t \geqslant 0$, $e^{2\theta t}\|Y(t)\|^2 \leqslant \varphi(0)$, donc $\|X(t) - X^*\|^2 \leqslant \|Y(0)\|^2 e^{-2\theta t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. Chaque composante de $x(t) - x^*$ tend donc vers 0.

$$\boxed{\text{Si } \alpha+\beta < 1,\ \text{l'équilibre } x^* \text{ est attractif.}}$$

Partie II – Un exemple de pilotage non linéaire

Partie II – Système différentiel non linéaire et formes quadratiques

Questions 4 à 8.

Corrigé – Partie II.

4. Solutions particulières et équilibre.

a) Comme $\nu > -1$, on a $1 + \nu e^{-t} > 0$ pour $t \geqslant 0$ (si $\nu < 0$, $\nu e^{-t} \geqslant \nu > -1$). Donc $x : t \mapsto \frac{1}{1+\nu e^{-t}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et

$$x'(t) = \frac{\nu e^{-t}}{(1+\nu e^{-t})^2} = x(t) \cdot \frac{\nu e^{-t}}{1+\nu e^{-t}} = x(t)\big(1 - x(t)\big).$$

Avec $x_1 = x_2 = x$, on a $F_1(x, x) = (-x + 0 + 1)x = x(1-x) = x'$, et de même pour F_2.

$$\boxed{(x_1, x_2) \text{ est solution de } (S).}$$

b) Soit $c \in]0, 1[$; on prend $\nu = \frac{1}{c} - 1 > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+\nu e^{-t}}$ est croissante et vaut $\frac{1}{1+\nu} = c$ en 0, donc elle est à valeurs dans $[c, 1[$.

$$\boxed{\text{Avec } \nu = \tfrac{1}{c} - 1, \text{ la solution de a) est à valeurs dans } [c, +\infty[^2.}$$

c) Pour $u_1, u_2 > 0$, on a $F_1(u) = F_2(u) = 0$ si et seulement si $-u_1 + \rho(u_2 - u_1) + 1 = 0$ et $-u_2 + \rho(u_1 - u_2) + 1 = 0$. Par différence, $-(1 + 2\rho)(u_1 - u_2) = 0$, donc $u_1 = u_2$, puis $u_1 = 1$.

$$\boxed{x^* = (1, 1).}$$

d) Non : la fonction constante nulle est solution de (S) (car $F_1(0, 0) = F_2(0, 0) = 0$) et ne converge pas vers $(1, 1)$.

$$\boxed{\text{Toutes les solutions ne convergent pas vers } x^*.}$$

5. Les formes quadratiques q_r.

a) On a $q_r(1, 1) = 2 - 2r$ et $q_r(1, -1) = 2 + 2r$. Donc si $|r| \geqslant 1$, q_r n'est pas définie positive. Si $|r| < 1$, on écrit $q_r(u) = (u_1 - ru_2)^2 + (1 - r^2)u_2^2 \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $u_2 = 0$ et $u_1 = 0$.
Dans ce cas, comme $2|ru_1u_2| \leqslant |r|(u_1^2 + u_2^2)$, on a $q_r(u) \geqslant (1 - |r|)\|u\|^2$. Ainsi, pour $u \in C_r$, $\|u\|^2 \leqslant \frac{1}{1-|r|}$: C_r est borné. De plus $C_r = q_r^{-1}(\{1\})$ est fermé, comme image réciproque d'un fermé par une fonction continue.

$$\boxed{q_r \text{ est définie positive } \iff |r| < 1 \text{ ; alors } C_r \text{ est un fermé borné de } \mathbb{R}^2.}$$

b) C_r est fermé, borné et non vide (il contient $(1, 0)$), et q_s est continue sur $\mathbb{R}^2$. D'après le théorème des bornes atteintes :

$$\boxed{q_s \text{ atteint sur } C_r \text{ un minimum } m_{r,s} \text{ et un maximum } M_{r,s}.}$$

c) La contrainte s'écrit $g(u) = 0$ avec $g = q_r - 1$, de classe $\mathcal{C}^1$, et $\nabla g(u) = 2(u_1 - ru_2,\ u_2 - ru_1)$. Si $\nabla g(u) = 0$, alors $u_1 = ru_2 = r^2u_1$, donc $u_1 = 0$ puis $u_2 = 0$; or $(0, 0) \notin C_r$.

$$\boxed{\nabla g \text{ ne s'annule pas sur } C_r : \text{la contrainte est non critique.}}$$

d) q_s et q_r sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ et la contrainte est non critique. Si q_s admet en $u \in C_r$ un extremum local sous la contrainte C_r, alors :

$$\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \nabla q_s(u) = \lambda \nabla q_r(u), \text{ soit } \begin{cases} u_1 - su_2 = \lambda(u_1 - ru_2) \\ u_2 - su_1 = \lambda(u_2 - ru_1). \end{cases}}$$

e) Soit $u \in C_r$ vérifiant d). En sommant puis en soustrayant les deux équations :

$$(1-s-\lambda(1-r))(u_1+u_2)=0, \qquad (1+s-\lambda(1+r))(u_1-u_2)=0.$$

Comme $u \neq 0$, u_1+u_2 et u_1-u_2 ne sont pas tous deux nuls. Comme $\frac{1-s}{1-r} \neq \frac{1+s}{1+r}$ (car $s \neq r$), on a deux cas :

- soit $\lambda = \frac{1-s}{1-r}$ et $u_1 = u_2$;
- soit $\lambda = \frac{1+s}{1+r}$ et $u_1 = -u_2$.

De plus, en multipliant la première équation par u_1, la seconde par u_2 et en sommant, on obtient $q_s(u) = \lambda q_r(u) = \lambda$. Le minimum et le maximum étant atteints en de tels points, ils appartiennent à $\left\{\frac{1-s}{1-r}, \frac{1+s}{1+r}\right\}$. Les deux valeurs sont prises : en $u_1 = u_2 = \frac{1}{\sqrt{2(1-r)}}$ pour la première, en $u_1 = -u_2 = \frac{1}{\sqrt{2(1+r)}}$ pour la seconde. Comme $0 < s < r < 1$, on a $\frac{1+s}{1+r} < 1 < \frac{1-s}{1-r}$.

$$\boxed{m_{r,s} = \frac{1+s}{1+r}, \qquad M_{r,s} = \frac{1-s}{1-r}.}$$

Pour $u \neq 0$, $\frac{u}{\sqrt{q_r(u)}} \in C_r$ et, par homogénéité, $q_s\left(\frac{u}{\sqrt{q_r(u)}}\right) = \frac{q_s(u)}{q_r(u)}$, d'où $m_{r,s}\, q_r(u) \leqslant q_s(u) \leqslant M_{r,s}\, q_r(u)$, inégalités encore vraies en $u = 0$.

$$\boxed{\mu = \frac{1-s}{1-r} \text{ convient : } \forall u \in \mathbb{R}^2,\ q_s(u) \leqslant \mu\, q_r(u).}$$

6. Lignes de niveau et Python.

a) On a $u_1^2+u_2^2 = \frac{1}{2}((v_1-v_2)^2+(v_1+v_2)^2) = v_1^2+v_2^2$ et $u_1u_2 = \frac{1}{2}(v_1^2-v_2^2)$. Donc

$$q_r(u_1,u_2) = v_1^2+v_2^2-r(v_1^2-v_2^2). \qquad \boxed{(u_1,u_2) \in C_r \iff (1-r)v_1^2+(1+r)v_2^2 = 1.}$$

b) Pour $r = \frac{1}{2}$, la condition de a) s'écrit $\left(\frac{v_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{\sqrt{2/3}}\right)^2 = 1$, ce qui équivaut à l'existence de $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que $v_1 = \sqrt{2}\cos\theta$ et $v_2 = \sqrt{2/3}\sin\theta$. Alors

$$u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(v_1-v_2) = \cos\theta - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta, \qquad u_2 = \cos\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta.$$

Le programme paramètre donc C_r par θ.

- `theta = np.linspace(0, 2*np.pi, n)` crée un tableau de $n = 100$ valeurs régulièrement espacées de 0 à 2π (bornes incluses) ; `ct` et `st` contiennent leurs cosinus et sinus.
- `Cr` est un tableau à 2 lignes et 100 colonnes. La colonne j contient les coordonnées (u_1, u_2) du point de C_r de paramètre θ_j.
- `Cr[0]` est le tableau (de taille 100) des abscisses u_1 de ces points, et `Cr[1]` celui des ordonnées.

`plt.plot` relie ces 100 points par des segments, ce qui trace une approximation de la courbe fermée C_r.

c) Pour $s = \frac{1}{4}$, on a $q_s(u) = z \iff \frac{3}{4}v_1^2 + \frac{5}{4}v_2^2 = z$, soit $v_1 = \sqrt{z}\sqrt{\frac{4}{3}}\cos\theta$ et $v_2 = \sqrt{z}\sqrt{\frac{4}{5}}\sin\theta$. D'où $u_1 = \sqrt{z}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\theta - \sqrt{\frac{2}{5}}\sin\theta\right)$ et $u_2 = \sqrt{z}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\theta + \sqrt{\frac{2}{5}}\sin\theta\right)$.

```
a = np.sqrt(2/3)
b = np.sqrt(2/5)
Csz = np.array([np.sqrt(z)*(a*ct - b*st),
                np.sqrt(z)*(a*ct + b*st)])
plt.plot(Csz[0], Csz[1])
```

d) D'après 5.e), pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, $q_s(u) \geqslant m_{r,s}\, q_r(u)$, avec $m_{r,s} = \frac{1+1/4}{1+1/2} = \frac{5}{6}$, et il y a égalité si et seulement si $u_1 = -u_2$.

- Les deux courbes ont un point commun u, donc $z_0 = q_s(u) \geqslant m_{r,s}$.
- Le point u de la ligne $\{q_s = z_0\}$ situé sur la droite $u_1 = -u_2$ vérifie $q_r(u) = \frac{z_0}{m_{r,s}}$. Comme la ligne est intérieure à C_r, on a $q_r(u) \leqslant 1$, donc $z_0 \leqslant m_{r,s}$.

$$\boxed{z_0 = m_{r,s} = \frac{5}{6}.}$$

Les points communs sont les points de C_r où q_s atteint son minimum, c'est-à-dire $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1)$. En ces points, la condition de 5.d) donne $\nabla q_s = \lambda \nabla q_r$: les gradients, qui sont orthogonaux aux lignes de niveau, sont colinéaires. Les deux courbes ont donc la même tangente en ces deux points.

7. Convergence des solutions minorées.

a) Avec $x_i = 1+y_i$, on a $-x_1+\rho(x_2-x_1)+1 = -(1+\rho)y_1+\rho y_2 = -(1+\rho)(y_1-sy_2)$ car $\rho = (1+\rho)s$. Ainsi $y_1' = -(1+\rho)x_1(y_1-sy_2)$ et, de même, $y_2' = -(1+\rho)x_2(y_2-sy_1)$. Or $f = y_1^2 + y_2^2 - 2sy_1y_2$, donc

$$f' = 2y_1'(y_1 - sy_2) + 2y_2'(y_2 - sy_1).$$

$$\boxed{f' = -2(1+\rho)\big[x_1(y_1 - sy_2)^2 + x_2(y_2 - sy_1)^2\big].}$$

b) On a $x_i(t) \geqslant c$, et les carrés sont positifs. De plus :

- $(y_1 - sy_2)^2 + (y_2 - sy_1)^2 = (1+s^2)(y_1^2+y_2^2) - 4sy_1y_2 = (1+s^2)q_r(y_1,y_2)$ avec $r = \frac{2s}{1+s^2}$;
- $1 - s = \frac{1}{1+\rho}$;
- $1 - r = \frac{(1-s)^2}{1+s^2}$.

Donc $(1+\rho)(1+s^2) = \frac{1+s^2}{1-s} = \frac{1-s}{1-r}$.

$$\boxed{f'(t) \leqslant -2c\,\frac{1-s}{1-r}\,q_r(y_1(t), y_2(t)).}$$

c) On a $s = \frac{\rho}{1+\rho} \in]0,1[$ et $r = \frac{2s}{1+s^2}$, avec $r > s$ (car $1 + s^2 < 2$) et $r < 1$ (car $(1-s)^2 > 0$) : on est dans le cadre de 5. D'après 5.e), $f = q_s(y) \leqslant \frac{1-s}{1-r}q_r(y)$, d'où :

$$\boxed{f'(t) \leqslant -2cf(t).}$$

Alors $t \mapsto f(t)e^{2ct}$ a une dérivée $(f' + 2cf)e^{2ct} \leqslant 0$; elle est donc décroissante, et $0 \leqslant f(t) \leqslant f(0)e^{-2ct}$ (car q_s est définie positive). Par encadrement :

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0.}$$

8. Conclusion.

Soit x une solution de (S) telle que $x_1 \geqslant a_1 > 0$ et $x_2 \geqslant a_2 > 0$. Avec $c = \min(a_1, a_2, \frac{1}{2}) \in]0,1[$, x est à valeurs dans $[c, +\infty[^2$ et, d'après 7, $f(t) \to 0$. Or $f(t) = q_s(y(t)) \geqslant (1-s)\|y(t)\|^2$ (voir 5.a). Donc $y(t) \to 0$.

Toute solution dont chaque composante est minorée par un réel > 0 converge vers $x^* = (1,1)$.

Partie III – Pilotage pas à pas dans un contexte aléatoire

Partie III – Suite de vecteurs aléatoires perturbée

Questions 9 à 12.

Corrigé – Partie III.

9. Unique équilibre.

$X^* = AX^* + B \iff (I_p - A)X^* = B$. Or $I_p - A = Q(I_p - D)Q^{-1}$, où $I_p - D = \mathrm{diag}(1-\lambda_k)$ est inversible puisque $\lambda_k \neq 1$. Donc $I_p - A$ est inversible.

Il existe un unique équilibre : $X^* = (I_p - A)^{-1}B$.

10. Espérance.

Préliminaire. Par récurrence, chaque $y_k(n)$ est une combinaison linéaire de produits $\prod_{i\in S} U_i$, avec $S \subset \{1,\dots,n\}$ (chaque U_i apparaît au plus une fois dans un produit). Par indépendance, $\mathbb{E}(\prod_{i\in S} U_i^2) = \prod_{i\in S}\mathbb{E}(U_i^2)$ est fini. Donc $y_k(n)$ admet un moment d'ordre 2. De plus, $y_k(n)$ est une fonction de $(U_1,\dots,U_n)$, donc indépendante de U_{n+1} (lemme des coalitions).

a) Par linéarité, $\mathbb{E}(Y(1)) = AX(0) + \mathbb{E}(U_1)X(0) + B = AX(0) + B$. Ensuite, $\mathbb{E}(Y(n+1)) = A\,\mathbb{E}(Y(n)) + \mathbb{E}(U_{n+1}Y(n)) + B$, et par indépendance $\mathbb{E}(U_{n+1}y_k(n)) = \mathbb{E}(U_{n+1})\mathbb{E}(y_k(n)) = 0$. En retranchant $X^* = AX^* + B$:

$$\boxed{\mathbb{E}(Y(1)) = AX(0) + B, \qquad \mathbb{E}(Y(n+1)) - X^* = A(\mathbb{E}(Y(n)) - X^*).}$$

b) On a aussi $\mathbb{E}(Y(1)) - X^* = A(X(0) - X^*)$. Par récurrence, $\mathbb{E}(Y(n)) - X^* = A^n(X(0) - X^*)$. Or $A^n = QD^nQ^{-1}$, et $D^n = \mathrm{diag}(\lambda_k^n) \to 0$ car $|\lambda_k| < 1$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(y(n)) = x^*.}$$

11. Variance des $z_k(n)$.

a) $Z(n+1) = Q^{-1}(A + U_{n+1}I_p)QZ(n) + Q^{-1}B = (D + U_{n+1}I_p)Z(n) + Q^{-1}B$. Donc $z_k(n+1) = (\lambda_k + U_{n+1})z_k(n) + \gamma_k$, où γ_k est la k-ième coordonnée de $Q^{-1}B$. Notons $U = U_{n+1}$, $v = v_{n+1}$ et $z = z_k(n)$; les variables U et z sont indépendantes. Alors :

- $\mathbb{E}((\lambda_k + U)z) = \lambda_k\mathbb{E}(z)$;
- $\mathbb{E}((\lambda_k + U)^2 z^2) = \mathbb{E}((\lambda_k + U)^2)\mathbb{E}(z^2) = (\lambda_k^2 + v)\mathbb{E}(z^2)$.

Une variance ne change pas par translation, donc

$$\mathbb{V}(z_k(n+1)) = (\lambda_k^2 + v)(\mathbb{V}(z) + \mathbb{E}(z)^2) - \lambda_k^2 \mathbb{E}(z)^2.$$

$$\boxed{\mathbb{V}(z_k(n+1)) = (\lambda_k^2 + v_{n+1})\mathbb{V}(z_k(n)) + v_{n+1}\mathbb{E}(z_k(n))^2.}$$

b) $\mathbb{E}(Z(n)) = Q^{-1}\mathbb{E}(Y(n))$ converge (question 10), donc $(\mathbb{E}(z_k(n))^2)_n$ est bornée : il existe $M_k > 0$ tel que $\mathbb{E}(z_k(n))^2 \leqslant M_k$ pour tout n. Posons $c_k = \frac{1+\lambda_k^2}{2} \in]0,1[$. Comme $v_n \to 0$ et $c_k - \lambda_k^2 = \frac{1-\lambda_k^2}{2} > 0$, il existe N tel que $v_{n+1} \leqslant c_k - \lambda_k^2$ pour tout $n \geqslant N$. Avec a), puisque $\mathbb{V}(z_k(n)) \geqslant 0$:

$$\boxed{\forall n \geqslant N, \quad \mathbb{V}(z_k(n+1)) \leqslant c_k \mathbb{V}(z_k(n)) + M_k v_{n+1}.}$$

12. Convergence en probabilité.

On note $c = c_k$.

a) D'après 11.b) avec $n = N+m$, on a $\alpha_{m+1} \leqslant c\,\alpha_m + w_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Récurrence : pour $m = 0$, $\alpha_1 \leqslant c\alpha_0 + w_0$. Si la propriété est vraie au rang m, alors

$$\alpha_{m+2} \leqslant c\left(c^{m+1}\alpha_0 + \sum_{j=0}^{m} w_j c^{m-j}\right) + w_{m+1} = c^{m+2}\alpha_0 + \sum_{j=0}^{m+1} w_j c^{m+1-j}.$$

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{m+1} \leqslant c_k^{m+1}\alpha_0 + \sum_{j=0}^{m} w_j c_k^{m-j}.}$$

b) Posons $S_m = \sum_{j=0}^{m} w_j c^{m-j} \geqslant 0$. Pour $K \in \mathbb{N}$, en intervertissant les sommes finies :

$$\sum_{m=0}^{K} S_m = \sum_{j=0}^{K} w_j \sum_{m=j}^{K} c^{m-j} \leqslant \frac{1}{1-c}\sum_{j=0}^{+\infty} w_j < +\infty,$$

car $\sum w_j = M_k \sum_j v_{N+j+1}$ converge. La série à termes positifs $\sum S_m$ a donc des sommes partielles majorées : elle converge, et $S_m \to 0$. Comme $c^{m+1}\alpha_0 \to 0$ et $\alpha_{m+1} \geqslant 0$, a) donne $\alpha_m \to 0$ par encadrement.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}(z_k(n)) = 0.}$$

c) $Y(n) = QZ(n)$, donc $y_k(n) = \sum_j q_{kj} z_j(n)$. D'après l'inégalité $|\operatorname{Cov}(S,T)| \leqslant \sigma(S)\sigma(T)$:

$$\mathbb{V}(y_k(n)) = \sum_{i,j} q_{ki}q_{kj}\operatorname{Cov}(z_i(n), z_j(n)) \leqslant \left(\sum_j |q_{kj}|\sigma(z_j(n))\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après 10.b), pour n assez grand, $|\mathbb{E}(y_k(n)) - x_k^*| < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors $[|y_k(n) - x_k^*| \geqslant \varepsilon] \subset [|y_k(n) - \mathbb{E}(y_k(n))| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}]$, et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne

$$P(|y_k(n) - x_k^*| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{4\mathbb{V}(y_k(n))}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

$$\boxed{y_k(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{P} x_k^*.}$$