

**HEC Paris – ESSEC****Mathématiques I**

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2015

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

La question de l'énoncé initial consacrée aux racines complexes de l'unité a été retirée. Elle n'est pas nécessaire aux études réelles qui suivent.

**Table des matières**

|                                                                                                                          |          |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1 Deux exemples de pilotage linéaire</b>                                                                              | <b>2</b> |
| <i>Thèmes abordés : systèmes différentiels ; réduction ; algèbre bilinéaire. . . . .</i>                                 | <i>2</i> |
| <b>2 Un exemple de pilotage non linéaire</b>                                                                             | <b>3</b> |
| <i>Thèmes abordés : systèmes différentiels ; fonctions de plusieurs variables ; algèbre bilinéaire ; Python. . . . .</i> | <i>3</i> |
| <b>3 Pilotage pas à pas dans un contexte aléatoire</b>                                                                   | <b>4</b> |
| <i>Thèmes abordés : réduction ; suites ; estimations ; convergences de variables. . . . .</i>                            | <i>4</i> |

L'objet du problème est l'étude du comportement asymptotique de systèmes dynamiques discrets ou continus. Les trois parties sont indépendantes.

Dans tout le problème,  $p \geq 1$ . Pour  $b \in \mathbb{R}^p$ , on note  $B$  sa matrice colonne dans la base canonique. La transposée de  $A$  est notée  ${}^tA$  et  $I_p$  désigne la matrice identité. Les dérivées, espérances et limites d'un vecteur sont définies composante par composante.

## 1 Deux exemples de pilotage linéaire

*Thèmes abordés : systèmes différentiels ; réduction ; algèbre bilinéaire.*

Soient  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  non nulle et  $b \in \mathbb{R}^p$ . Une application dérivable  $x : t \mapsto x(t)$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}^p$  est *pilotée par*  $(A, b)$  si

$$\forall t \geq 0, \quad X'(t) = AX(t) + B.$$

Un *équilibre* est un vecteur  $x^*$  tel que  $AX^* + B = 0$ . Il est *attractif* si toute application pilotée par  $(A, b)$  converge vers  $x^*$  en  $+\infty$ .

1. **Le cas  $p = 1$ .** Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  et  $x$  dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  telle que  $x' = ax + b$ .
  - a) Calculer la dérivée de  $t \mapsto \left(x(t) + \frac{b}{a}\right)e^{-at}$ .
  - b) En déduire  $x(t) = -\frac{b}{a} + \left(x(0) + \frac{b}{a}\right)e^{at}$ .
  - c) Montrer que le système possède un unique équilibre et déterminer à quelle condition celui-ci est attractif.
2. **Exemple 1.** On pose

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = (1, 1).$$

- a) Déterminer l'unique équilibre  $x^*$ .
  - b) Justifier que  $A$  est diagonalisable dans une base orthonormée.
  - c) Trouver  $\lambda \leq \mu$  et une matrice  $Q$  telle que  $Q^{-1} = {}^tQ$  et  $Q^{-1}AQ = \text{diag}(\lambda, \mu)$ .
  - d) Pour  $W(t) = {}^tQX(t)$ , vérifier  $W' = DW + {}^tQB$ , puis montrer que  $x^*$  est attractif.
3. **Exemple 2.** Soient  $\alpha, \beta > 0$ ,  $\alpha \neq \beta$ ,  $\alpha + \beta \neq 1$  et

$$M = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & \beta \\ \beta & -1 & \alpha \\ \alpha & \beta & -1 \end{pmatrix}, \quad c = (1, 1, 1).$$

- a) Trouver l'unique équilibre  $x^*$  du système piloté par  $(M, c)$ .
  - b) Vérifier que  $x : t \mapsto x^* + e^{(\alpha+\beta-1)t}c$  est pilotée par  $(M, c)$  et en déduire une condition nécessaire à l'attractivité de  $x^*$ .
  - c) On suppose cette condition réalisée et on pose  $N = {}^tM + M$ . Déterminer les valeurs propres de  $N$ , puis  $\theta > 0$  tel que ces valeurs propres soient inférieures ou égales à  $-2\theta$ .
  - d) Pour une application  $x$  pilotée par  $(M, c)$ , on pose  $y = x - x^*$  et  $\varphi(t) = e^{2\theta t}\|Y(t)\|^2$ .
    - (i) Vérifier que  $y$  est pilotée par  $(M, 0)$ .
    - (ii) Montrer que  $\varphi'(t) = e^{2\theta t} {}^tY(t)(N + 2\theta I_3)Y(t)$ .
    - (iii) Montrer que  $\varphi$  est décroissante.
    - (iv) En déduire que  $x^*$  est attractif.

## 2 Un exemple de pilotage non linéaire

*Thèmes abordés : systèmes différentiels ; fonctions de plusieurs variables ; algèbre bilinéaire ; Python.*

Soit  $\rho > 0$ . On considère le système

$$(S) \quad \begin{cases} x_1'(t) = F_1(x_1(t), x_2(t)), \\ x_2'(t) = F_2(x_1(t), x_2(t)), \end{cases}$$

où

$$F_1(u_1, u_2) = (-u_1 + \rho(u_2 - u_1) + 1)u_1, \quad F_2(u_1, u_2) = (-u_2 + \rho(u_1 - u_2) + 1)u_2.$$

4. Pour  $\nu > -1$ , on pose  $x_1(t) = x_2(t) = \frac{1}{1 + \nu e^{-t}}$ .
  - a) Vérifier que  $(x_1, x_2)$  est solution de  $(S)$ .
  - b) En déduire que pour tout  $c \in ]0, 1[$ , il existe une solution à valeurs dans  $[c, +\infty[^2$ .
  - c) Déterminer l'unique  $(x_1^*, x_2^*) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  tel que  $F_1(x_1^*, x_2^*) = F_2(x_1^*, x_2^*) = 0$ .
  - d) Toutes les solutions de  $(S)$  convergent-elles vers  $x^*$  ?
5. Pour  $r \in \mathbb{R}$ , on pose

$$q_r(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2 - 2ru_1u_2, \quad C_r = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : q_r(u_1, u_2) = 1\}.$$

Une forme quadratique  $q$  est dite *définie positive* si  $q(u) > 0$  pour tout  $u \neq 0$ .

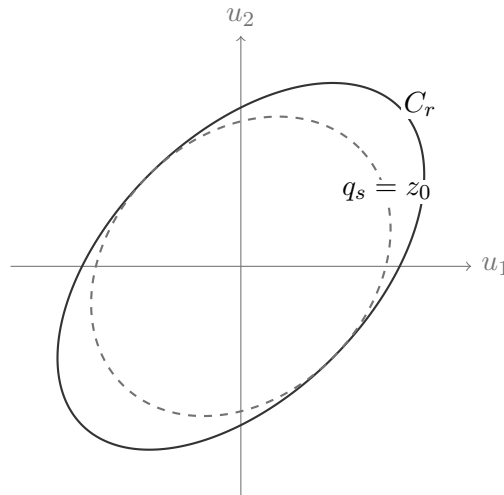
- a) Pour quelles valeurs de  $r$  la forme  $q_r$  est-elle définie positive ? Montrer qu'alors  $C_r$  est fermé et borné.
  - b) On suppose  $0 < s < r < 1$ . Justifier que  $q_s$  atteint sur  $C_r$  un minimum  $m_{r,s}$  et un maximum  $M_{r,s}$ .
  - c) Montrer que la contrainte  $q_r(u_1, u_2) = 1$  est non critique.
  - d) Énoncer la condition nécessaire du premier ordre pour un extremum de  $q_s$  sous cette contrainte.
  - e) Déterminer  $m_{r,s}$  et  $M_{r,s}$ , puis établir l'existence de  $\mu$  tel que  $q_s \leq \mu q_r$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
6. On conserve les notations précédentes.
    - a) Si  $(u_1, u_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}(v_1 - v_2, v_1 + v_2)$ , montrer que  $(u_1, u_2) \in C_r$  si et seulement si  $(1 - r)v_1^2 + (1 + r)v_2^2 = 1$ .
    - b) On prend  $r = \frac{1}{2}$  et  $s = \frac{1}{4}$ . Expliquer la méthode du programme Python suivant, ainsi que le format et le contenu du tableau **Cr**.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
n = 100
theta = np.linspace(0, 2*np.pi, n)
ct = np.cos(theta)
st = np.sin(theta)
Cr = np.array([ct - (1/np.sqrt(3))*st,
               ct + (1/np.sqrt(3))*st])
plt.plot(Cr[0], Cr[1])
plt.show()
```

- c) Compléter la définition de  $\mathbf{Csz}$  afin de tracer la ligne de niveau  $z_0 > 0$  de  $q_s$ .

```
Csz = np.array([np.sqrt(z)*(...*ct - ...*st),
                np.sqrt(z)*(...*ct + ...*st)])
plt.plot(Csz[0], Csz[1])
```

- d) Sur une représentation, la ligne de niveau  $z_0$  est intérieure à  $C_r$  et lui est tangente en deux points. Déterminer  $z_0$  et expliquer les tangences.



7. Soient  $c \in ]0, 1[$  et  $x$  une solution de  $(S)$  à valeurs dans  $[c, +\infty[^2$ . On pose  $y_i = x_i - 1$ ,  $s = \frac{\rho}{1+\rho}$  et  $f(t) = q_s(y_1(t), y_2(t))$ .
- Montrer que
 
$$f' = -2(1 + \rho)[x_1(y_1 - sy_2)^2 + x_2(y_2 - sy_1)^2].$$
  - Pour  $r = \frac{2s}{1+s^2}$ , montrer que  $f'(t) \leq -2c \frac{1-s}{1-r} q_r(y_1(t), y_2(t))$ .
  - En déduire  $f'(t) \leq -2cf(t)$ , puis  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ .
8. Quelle propriété en déduit-on pour toute solution de  $(S)$  dont chaque composante est minorée par un réel strictement positif ?

### 3 Pilotage pas à pas dans un contexte aléatoire

*Thèmes abordés : réduction ; suites ; estimations ; convergences de variables.*

Soient  $p \geq 2$ ,  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  non nulle et  $b \in \mathbb{R}^p$ . Un équilibre du système  $X(n+1) = AX(n) + B$  est un vecteur  $x^*$  tel que  $X^* = AX^* + B$ . On suppose qu'il existe une matrice inversible  $Q$  telle que  $D = Q^{-1}AQ = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  avec  $\lambda_k \in ]-1, 1[$ .

9. Montrer que le système admet un unique équilibre  $x^*$ .

Soit  $(U_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, centrées et admettant un moment d'ordre 2. On note  $v_n = \mathbb{V}(U_n)$ . Pour  $x(0) \in \mathbb{R}^p$ , on définit

$$Y(1) = (A + U_1 I_p)X(0) + B, \text{ et } Y(n+1) = (A + U_{n+1} I_p)Y(n) + B.$$

10. On note  $\mathbb{E}(y(n)) = (\mathbb{E}(y_1(n)), \dots, \mathbb{E}(y_p(n)))$ .

- Calculer  $\mathbb{E}(Y(1))$  et montrer que  $\mathbb{E}(Y(n+1)) - X^* = A(\mathbb{E}(Y(n)) - X^*)$ .

- b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(y(n)) = x^*$ .
11. On pose  $Z(n) = Q^{-1}Y(n)$ .

a) Montrer que

$$\mathbb{V}(z_k(n+1)) = (\lambda_k^2 + v_{n+1})\mathbb{V}(z_k(n)) + v_{n+1}\mathbb{E}(z_k(n))^2.$$

b) Si  $v_n \rightarrow 0$ , établir l'existence de  $c_k \in ]0, 1[$ ,  $N \in \mathbb{N}$  et  $M_k > 0$  tels que, pour  $n \geq N$ ,

$$\mathbb{V}(z_k(n+1)) \leq c_k \mathbb{V}(z_k(n)) + M_k v_{n+1}.$$

12. On suppose que la série de terme général  $v_n$  converge. Pour un indice  $k$  fixé, on pose  $\alpha_m = \mathbb{V}(z_k(N+m))$  et  $w_m = M_k v_{N+m+1}$ .

a) Montrer que

$$\alpha_{m+1} \leq c_k^{m+1} \alpha_0 + \sum_{j=0}^m w_j c_k^{m-j}.$$

b) En déduire  $\mathbb{V}(z_k(n)) \rightarrow 0$ .

c) Montrer que  $y_k(n)$  converge en probabilité vers  $x_k^*$ .