

HEC Paris – ESCP Europe

Mathématiques approfondies – Mathématiques II

Corrigé du sujet adapté – 2015

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Partie I – Probabilité de surpassement et espérance

Partie I – La formule $\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} S_X(x) dx$

Questions 1 à 6.

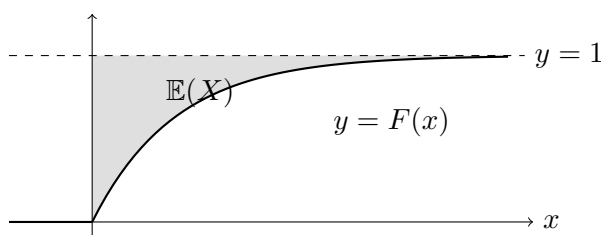
Corrigé – Partie I.

1. Le cas exponentiel.

- a) Pour $x \geq 0$, $S_X(x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}$. Pour $A > 0$, $\int_0^A e^{-\lambda x} dx = \frac{1 - e^{-\lambda A}}{\lambda} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda}$.
Or $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = \int_0^{+\infty} S_X(x) dx.$$

- b) F est nulle sur $\mathbb{R}_-$ et vaut $1 - e^{-\lambda x}$ sur $\mathbb{R}_+$: elle est continue, croissante et concave sur $\mathbb{R}_+$, de tangente $y = \lambda x$ en 0 et d'asymptote $y = 1$ en $+\infty$. Comme $S_X = 1 - F$, $\mathbb{E}(X)$ est l'aire du domaine compris entre l'asymptote $y = 1$ et la courbe de F , pour $x \geq 0$.



$$\mathbb{E}(X) = \text{aire entre la droite } y = 1 \text{ et la courbe de } F \text{ sur } \mathbb{R}_+.$$

2. La fonction h .

- a) h est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, et $h(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$. L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge ; par comparaison de fonctions positives :

$$\int_0^{+\infty} h(x) dx \text{ converge.}$$

- b) $\frac{c}{x+1} + \frac{d}{x+2} = \frac{(c+d)x+2c+d}{(x+1)(x+2)}$, qui est égal à $h(x)$ si $c+d=0$ et $2c+d=1$, soit $c=1$

et $d = -1$.

$$h(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}, \quad H(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) \text{ est une primitive de } h \text{ sur } \mathbb{R}_+.$$

c) f_0 est positive et continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0. De plus $\int_{-\infty}^0 f_0 = 0$ et

$$\int_0^A h(x) dx = \ln \frac{A+1}{A+2} - \ln \frac{1}{2} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \ln 2, \quad \text{donc} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_0 = \frac{\ln 2}{\ln 2} = 1.$$

f_0 est une densité de probabilité.

3. Une variable sans espérance.

a) $x \mapsto xf_0(x)$ est positive sur $\mathbb{R}_+$ et $xf_0(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x \ln 2}$; l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge.

X n'admet pas d'espérance.

b) Pour $x < 0$, $S_X(x) = 1$ car $X \geq 0$. Pour $x \geq 0$, avec 2.b) :

$$S_X(x) = \frac{1}{\ln 2} \int_x^{+\infty} h(t) dt = \frac{1}{\ln 2} \left(0 - \ln \frac{x+1}{x+2} \right).$$

$$S_X(x) = \frac{1}{\ln 2} \ln \left(1 + \frac{1}{x+1} \right) \quad (x \geq 0), \quad S_X(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x \ln 2}.$$

c) S_X est positive et continue sur $\mathbb{R}_+$, et $S_X(x) \sim \frac{1}{x \ln 2}$, terme d'une intégrale de Riemann divergente en $+\infty$. Par comparaison :

$$\int_0^{+\infty} S_X(x) dx \text{ diverge.}$$

4. Propriétés de S_X .

a) $S_X = 1 - F_X$, où F_X est la fonction de répartition de X , croissante et de limite 1 en $+\infty$.

$$S_X \text{ est décroissante et } \lim_{x \rightarrow +\infty} S_X(x) = 0.$$

b) Une fonction de répartition est continue à droite en tout point, donc $S_X = 1 - F_X$ aussi. Comme $X \geq 0$, $S_X(x) = 1$ pour $x < 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} S_X(x) = 1$; et $S_X(0) = P([X > 0]) = 1 - P([X = 0])$.

$$S_X \text{ est continue à droite ; elle est continue en } 0 \iff P([X = 0]) = 0.$$

5. Le cas à densité.

a) X est à densité, donc F_X est continue sur $\mathbb{R}$, et $S_X = 1 - F_X$ aussi. Pour $x > 0$, $F_X(x) = F_X(1) + \int_1^x f(t) dt$ avec f continue sur $]0, +\infty[$: F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

$$S_X \text{ est continue sur } \mathbb{R}, \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ avec } S'_X = -f.$$

- b) Sur $]0, 1]$, $0 \leq xf(x) \leq f(x)$, et $\int_0^1 f$ converge (f est une densité). Par comparaison de fonctions positives :

$$\int_0^1 xf(x) dx \text{ converge.}$$

- c) Pour $A = 0$, les deux membres sont nuls. Soit $A > 0$ et $\varepsilon \in]0, A[$. Les fonctions $u = S_X$ et $v : x \mapsto x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon, A]$, avec $u' = -f$ et $v' = 1$. Par intégration par parties :

$$\int_{\varepsilon}^A S_X(x) dx = AS_X(A) - \varepsilon S_X(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^A xf(x) dx.$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$: $\varepsilon S_X(\varepsilon) \rightarrow 0$ (S_X est bornée), $\int_{\varepsilon}^A S_X \rightarrow \int_0^A S_X$ (S_X est continue sur $[0, A]$) et $\int_{\varepsilon}^A xf \rightarrow \int_0^A xf$ (d'après b)).

$$\int_0^A S_X(x) dx = AS_X(A) + \int_0^A xf(x) dx.$$

- d) Si $\int_0^{+\infty} S_X$ converge, alors, comme $AS_X(A) \geq 0$ et $S_X \geq 0$, on a pour tout $A \geq 0$: $\int_0^A xf(x) dx \leq \int_0^A S_X \leq \int_0^{+\infty} S_X$. La fonction $A \mapsto \int_0^A xf$ est croissante et majorée, donc converge. Comme f est nulle sur $\mathbb{R}_-$ et $xf \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$:

X admet une espérance.

- e) $S_X(A) = P([X > A]) = \int_A^{+\infty} f(x) dx$, et $xf(x) \geq Af(x)$ pour $x \geq A$. Par croissance de l'intégrale :

$$\int_A^{+\infty} xf(x) dx \geq A \int_A^{+\infty} f(x) dx = AS_X(A).$$

- f) Si X admet une espérance, alors $0 \leq AS_X(A) \leq \int_A^{+\infty} xf$, qui tend vers 0 (reste d'une intégrale convergente). Avec c), $\int_0^A S_X \rightarrow 0 + \int_0^{+\infty} xf = \mathbb{E}(X)$. La réciproque est d).

$$X \text{ admet une espérance} \iff \int_0^{+\infty} S_X \text{ converge,} \\ \text{et alors } \mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} S_X(x) dx.$$

6. Le cas à valeurs dans $\mathbb{N}$.

- a) Comme X est à valeurs entières, $S_X(k) = P([X \geq k+1])$. Récurrence sur n : pour $n = 0$, les deux membres valent $P([X \geq 1])$. Si l'égalité est vraie au rang n , on ajoute $S_X(n+1) = P([X \geq n+2])$, et on utilise $P([X \geq n+1]) = P([X = n+1]) + P([X \geq n+2])$:

$$(n+1)P([X \geq n+1]) + P([X \geq n+2]) = (n+1)P([X = n+1]) \\ + (n+2)P([X \geq n+2]).$$

$$\sum_{k=0}^n S_X(k) = (n+1)P([X \geq n+1]) + \sum_{k=0}^n kP([X = k]).$$

- b) Si $\sum S_X(n)$ converge, alors $\sum_{k=0}^n kP([X = k]) \leq \sum_{k=0}^n S_X(k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} S_X(k)$. La série à termes positifs $\sum kP([X = k])$ a des sommes partielles majorées, donc converge.

X admet une espérance.

- c) Si X admet une espérance, $0 \leq (n+1)P([X \geq n+1]) = \sum_{k \geq n+1} (n+1)P([X = k]) \leq \sum_{k \geq n+1} kP([X = k]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (reste d'une série convergente). Par a), $\sum_{k=0}^n S_X(k) \rightarrow \mathbb{E}(X)$. La réciproque est b).

$$X \text{ admet une espérance} \iff \sum S_X(n) \text{ converge, et alors } \mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_X(n).$$

- d) (i) Pour $x \in [k, k+1[$ ($k \in \mathbb{N}$), $[X > x] = [X \geq k+1]$ car X est à valeurs entières, donc $S_X(x) = S_X(k)$. Par la relation de Chasles :

$$\int_0^N S_X(x) dx = \sum_{k=0}^{N-1} S_X(k).$$

- (ii) Soit $A \geq 0$ et $N = \lfloor A \rfloor$. Comme $S_X \geq 0$, on a $\int_0^N S_X \leq \int_0^A S_X \leq \int_0^{N+1} S_X$. Quand $A \rightarrow +\infty$, $N \rightarrow +\infty$ et les deux bornes tendent vers $\mathbb{E}(X)$ par (i) et c). Par encadrement :

$$\mathbb{E}(X) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A S_X(x) dx.$$

Partie II – Fonctions de distorsion et espérances corrigées : un exemple

Partie II – La distorsion w_α

Questions 7 à 9.

Corrigé – Partie II.

7. La fonction w_α .

- a) Φ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ (sa dérivée φ est strictement positive), avec $\lim_{-\infty} \Phi = 0$ et $\lim_{+\infty} \Phi = 1$. D'après le théorème de la bijection :

$$\Phi \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]0, 1[.$$

- b) Ψ est continue et strictement croissante sur $]0, 1[$, et dérivable car φ ne s'annule pas, avec $\Psi'(x) = \frac{1}{\varphi(\Psi(x))}$. Donc $w_\alpha = \Phi(\Psi - \Psi(\alpha))$ est continue et dérivable sur $]0, 1[$. Quand $x \rightarrow 0^+$, $\Psi(x) \rightarrow -\infty$, donc $w_\alpha(x) \rightarrow 0 = w_\alpha(0)$. Quand $x \rightarrow 1^-$, $\Psi(x) \rightarrow +\infty$, donc $w_\alpha(x) \rightarrow 1 = w_\alpha(1)$.

$$w_\alpha \text{ est continue sur } [0, 1] \text{ et dérivable sur }]0, 1[.$$

- c) Notons $a = \Psi(\alpha)$. Pour $x \in]0, 1[$:

$$w'_\alpha(x) = \frac{\varphi(\Psi(x) - a)}{\varphi(\Psi(x))} = \exp\left(-\frac{(\Psi(x) - a)^2}{2} + \frac{\Psi(x)^2}{2}\right).$$

$$w'_\alpha(x) = \exp\left(\Psi(\alpha)\Psi(x) - \frac{(\Psi(\alpha))^2}{2}\right).$$

d) $w_\alpha(\alpha) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$ et $w'_\alpha(\alpha) = e^{a^2 - a^2/2} = e^{\Psi(\alpha)^2/2}$.

$$y = \frac{1}{2} + e^{\Psi(\alpha)^2/2}(x - \alpha).$$

e) On a $w_\alpha(0) = 0$ et $w_\alpha(1) = 1$, et w_α est continue sur $[0, 1]$ avec $w'_\alpha > 0$ sur $]0, 1[$, donc croissante sur $[0, 1]$. Comme $\alpha < \frac{1}{2}$ et $\Psi(\frac{1}{2}) = 0$, on a $a = \Psi(\alpha) < 0$. Alors $x \mapsto a\Psi(x)$ est décroissante, donc w'_α aussi : w_α est concave sur $]0, 1[$.

w_α est une fonction de distorsion.

8. Espérance corrigée d'une loi log-normale.

a) D'après le théorème de transfert, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(e^Y)$ existe si $\int_{-\infty}^{+\infty} e^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(y-\mu)^2/2} dy$ converge. Or

$$y - \frac{(y-\mu)^2}{2} = -\frac{(y-\mu-1)^2}{2} + \mu + \frac{1}{2}.$$

L'intégrande est donc $e^{\mu+1/2}$ fois la densité de la loi $\mathcal{N}(\mu+1, 1)$, d'intégrale 1.

$$\mathbb{E}(X) = e^{\mu+\frac{1}{2}}.$$

b) Soit $x > 0$. On a $S_X(x) = P([Y > \ln x]) = 1 - \Phi(\ln x - \mu) = \Phi(\mu - \ln x) \in]0, 1[$, donc $\Psi(S_X(x)) = \mu - \ln x$ et $w_\alpha(S_X(x)) = \Phi(\mu - \Psi(\alpha) - \ln x)$. Par ailleurs, $Xe^{-\Psi(\alpha)}$ a la même loi que $e^{Y-\Psi(\alpha)}$, avec $Y - \Psi(\alpha) \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu - \Psi(\alpha), 1)$. Donc

$$P([Xe^{-\Psi(\alpha)} > x]) = P([Y - \Psi(\alpha) > \ln x]) = \Phi(\mu - \Psi(\alpha) - \ln x).$$

$$w_\alpha(S_X(x)) = P([Xe^{-\Psi(\alpha)} > x]).$$

c) Posons $X' = Xe^{-\Psi(\alpha)}$. Par b), $w_\alpha \circ S_X = S_{X'}$ sur $]0, +\infty[$ (et en 0, les deux valent 1). X' a même loi que $e^{Y'}$ avec $Y' \hookrightarrow \mathcal{N}(m, 1)$, $m = \mu - \Psi(\alpha)$. Sa fonction de répartition vaut $x \mapsto \Phi(\ln x - m)$ sur $]0, +\infty[$ et 0 sur $] - \infty, 0]$: elle est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Donc X' admet une densité nulle sur $] - \infty, 0]$ et continue sur $]0, +\infty[$. D'après a) (appliqué à Y'), X' admet l'espérance $e^{m+1/2}$. D'après 5.f), $\int_0^{+\infty} S_{X'}$ converge et vaut $\mathbb{E}(X')$.

$$E_{w_\alpha}(X) \text{ existe et } E_{w_\alpha}(X) = e^{\mu+\frac{1}{2}-\Psi(\alpha)} = \mathbb{E}(X) e^{-\Psi(\alpha)}.$$

9. Tracé en Python.

a) `p` est un tableau `numpy` à une dimension de 97 éléments : 0.02, 0.03, ..., 0.98 (pas de 0.01). `q` est un tableau de même taille, dont l'élément d'indice k vaut $\Psi(p_k) - \Psi(\alpha)$.

b) On applique Φ terme à terme :

```
wa = sp.ndtr(q)
```

c) Pour $p \in]0, 1[$ fixé, $\alpha \mapsto \Psi(p) - \Psi(\alpha)$ est strictement décroissante, et Φ est strictement croissante. Donc $w_{0.2}(p) > w_{0.4}(p)$. On peut aussi remarquer que $w_\alpha(\alpha) = \frac{1}{2}$, et la courbe 1 passe par (0.2, 0.5).

$\alpha = 0.2$ correspond à la courbe 1 (la courbe supérieure).

d) On étudie les limites de w'_α en 0 et en 1, puis on applique l'inégalité des accroissements finis (ou le théorème des accroissements finis) aux taux d'accroissement.

- Comme $a < 0$, quand $x \rightarrow 0^+$, $a\Psi(x) \rightarrow +\infty$, donc $w'_\alpha(x) \rightarrow +\infty$. Pour $x \in]0, 1[$, il existe $c_x \in]0, x[$ tel que $\frac{w_\alpha(x) - w_\alpha(0)}{x} = w'_\alpha(c_x) \rightarrow +\infty$: la tangente en $(0, 0)$ est verticale.
- Quand $x \rightarrow 1^-$, $a\Psi(x) \rightarrow -\infty$, donc $w'_\alpha(x) \rightarrow 0$, et de même la tangente en $(1, 1)$ est horizontale.

Tangente verticale ($x = 0$) en $(0, 0)$, tangente horizontale ($y = 1$) en $(1, 1)$.

e) Quand $\alpha \rightarrow 0^+$, $\Psi(\alpha) \rightarrow -\infty$, donc pour tout $p \in]0, 1]$, $w_\alpha(p) \rightarrow 1$, tandis que $w_\alpha(0) = 0$.

La courbe se rapproche du segment vertical $[(0, 0), (0, 1)]$ et du segment horizontal $[(0, 1), (1, 1)]$.

Partie III – Sous-additivité des espérances corrigées

Partie III – Inégalité $E_g(X + Y) \leq E_g(X) + E_g(Y)$

Questions 10 à 14.

Corrigé – Partie III.

10. Propriétés des fonctions de distorsion.

a) Pour $n \geq 2$, $\frac{1}{n}$ et $1 - \frac{1}{n}$ sont dans $]0, 1[$, et g est concave sur $]0, 1[$. L'inégalité de concavité au point $x\left(1 - \frac{1}{n}\right) + (1 - x)\frac{1}{n}$ (combinaison convexe de coefficients x et $1 - x$) donne l'inégalité (avec égalité si $n = 2$).

Pour $n = 1$, l'inégalité s'écrit $g(1 - x) \geq 1 - x$; c'est le résultat de b) appliqué à $1 - x$, et b) n'utilise que les rangs $n \geq 2$.

$$g\left(x\left(1 - \frac{1}{n}\right) + (1 - x)\frac{1}{n}\right) \geq xg\left(1 - \frac{1}{n}\right) + (1 - x)g\left(\frac{1}{n}\right).$$

b) On fait tendre n vers $+\infty$ dans a). Comme g est continue sur $[0, 1]$, on obtient $g(x) \geq xg(1) + (1 - x)g(0)$.

$$\forall x \in [0, 1], \quad g(x) \geq x.$$

Remarque. De même, en passant à la limite dans l'inégalité de concavité, la continuité de g montre que g est concave sur $[0, 1]$ tout entier.

c) La première équation équivaut à $\lambda(b + \varepsilon - a) = \varepsilon$, soit $\lambda = \frac{\varepsilon}{b - a + \varepsilon} \in]0, 1[$ (car $\varepsilon > 0$ et $b > a$). La seconde s'écrit $a + \lambda(b + \varepsilon - a) = a + \varepsilon$: elle est alors vérifiée.

Par concavité de g (en a et $b + \varepsilon$) :

$$g(b) \geq \lambda g(a) + (1 - \lambda)g(b + \varepsilon), \quad g(a + \varepsilon) \geq (1 - \lambda)g(a) + \lambda g(b + \varepsilon).$$

En sommant, $g(b) + g(a + \varepsilon) \geq g(a) + g(b + \varepsilon)$.

$$g(b + \varepsilon) - g(a + \varepsilon) \leq g(b) - g(a).$$

Grâce à la remarque de b), le même raisonnement vaut pour $0 \leq a < b$, $\varepsilon > 0$ et $b + \varepsilon \leq 1$. L'inégalité est triviale (égalité) si $a = b$ ou $\varepsilon = 0$. Elle reste donc vraie dès que $0 \leq a \leq b \leq b + \varepsilon \leq 1$.

11. Premières propriétés de E_g .

- a) D'après 10.b), $0 \leq S_X \leq g \circ S_X$. Par comparaison de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} S_X$ converge. D'après le résultat admis à la fin de la partie I, $\mathbb{E}(X)$ existe et vaut $\int_0^{+\infty} S_X$.

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} S_X(x) dx \leq \int_0^{+\infty} g(S_X(x)) dx = E_g(X).$$

- b) Si $X = c$ presque sûrement (avec $c \geq 0$), alors $S_X = 1$ sur $[0, c[$ et $S_X = 0$ sur $[c, +\infty[$. Comme $g(1) = 1$ et $g(0) = 0$:

$$E_g(X) = \int_0^c 1 dx = c = \mathbb{E}(X).$$

- c) $rX + s \geq s$, donc $S_{rX+s}(x) = 1$ pour $x < s$, et $S_{rX+s}(x) = P([X > \frac{x-s}{r}]) = S_X(\frac{x-s}{r})$ pour $x \geq s$. Le changement de variable $x = s + ru$ (affine, de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif de $[0, +\infty[$ sur $[s, +\infty[$) conserve la nature de l'intégrale, et

$$\int_s^{+\infty} g\left(S_X\left(\frac{x-s}{r}\right)\right) dx = r \int_0^{+\infty} g(S_X(u)) du.$$

$$E_g(rX + s) \text{ existe et } E_g(rX + s) = s + rE_g(X).$$

- d) Pour $x \in \mathbb{R}$, $[T > x] \cap [T \leq W] \subset [W > x]$, d'où $S_T(x) = P([T > x] \cap [T \leq W]) \leq S_W(x)$. Comme g est croissante, $g \circ S_T \leq g \circ S_W$.

$$E_g(T) \leq E_g(W).$$

12. Le cas Y bornée.

Pour $x \geq B$, $S_Y(x) = 0$, donc $g(S_Y(x)) = 0$, et $0 \leq g \circ S_Y \leq 1$. Ainsi $E_g(Y) = \int_0^B g(S_Y(x)) dx$ existe et $E_g(Y) \leq B$.

Ensuite, $P([0 \leq X + Y \leq X + B]) = 1$. D'après 11.c) (avec $r = 1$, $s = B$), $E_g(X + B)$ existe et vaut $E_g(X) + B$. Comme $0 \leq g \circ S_{X+Y} \leq g \circ S_{X+B}$ (voir 11.d)), $E_g(X + Y)$ existe par comparaison et $E_g(X + Y) \leq E_g(X + B)$.

$$E_g(Y) \leq B \quad \text{et} \quad E_g(X + Y) \leq E_g(X) + B.$$

13. Le cas d'une variable à valeurs entières bornée.

- a) Si $P([U = 0]) = 1$, alors 12 (avec $B = 0$) donne $E_g(X + U) \leq E_g(X)$, et 11.b) donne $E_g(U) = 0$. Ceci vaut pour toute probabilité, toute distorsion g et toute X .

$$E_g(X + U) \leq E_g(X) + E_g(U) : \text{la propriété est vraie pour } n = 0.$$

- b) (i) Comme $Z \geq 0$ presque sûrement, $([Z = 0], [Z > 0])$ est un système quasi-complet d'événements, de probabilités $1 - p$ et p (si $p = 1$, le premier terme ci-dessous est nul). Sur $[Z = 0]$, $[X + Z > x] = [X > x]$. Par la formule des probabilités totales :

$$S_{X+Z}(x) = (1 - p)P_{[Z=0]}([X > x]) + pS_{X+Z}^*(x).$$

- (ii) Avec le même système, et puisque $[Z > x] \subset [Z > 0]$ pour $x > 0$:

$$S_X(x) = (1 - p)P_{[Z=0]}([X > x]) + pS_X^*(x), \quad S_Z(x) = pS_Z^*(x).$$

- (iii) Posons $\varepsilon = (1 - p)P_{[Z=0]}([X > x]) \geq 0$, $a = pS_X^*(x)$ et $b = pS_{X+Z}^*(x)$. Comme $X + Z \geq X$ P^* -presque sûrement, $S_X^* \leq S_{X+Z}^*$, donc $0 \leq a \leq b$. De plus $b + \varepsilon = S_{X+Z}(x) \leq 1$. D'après 10.c) (étendue ci-dessus), $g(b + \varepsilon) - g(a + \varepsilon) \leq g(b) - g(a)$, c'est-à-dire $g(S_{X+Z}(x)) - g(S_X(x)) \leq g(pS_{X+Z}^*(x)) - g(pS_X^*(x))$. On retranche $g(S_Z(x)) = g(pS_Z^*(x))$:

$$\begin{aligned} g(S_{X+Z}(x)) - g(S_X(x)) - g(S_Z(x)) \\ \leq g(pS_{X+Z}^*(x)) - g(pS_X^*(x)) - g(pS_Z^*(x)). \end{aligned}$$

- c) Par 10.b), $g(p) \geq p > 0$. La fonction h est continue et croissante sur $[0, 1]$, avec $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$. Elle est concave sur $]0, 1[$ comme composée de $x \mapsto px$ (affine, à valeurs dans $]0, p[\subset]0, 1[$) et de g concave, multipliée par $\frac{1}{g(p)} > 0$. C'est donc une fonction de distorsion.

On travaille avec la probabilité P^* , sous laquelle $Z \in \{1, \dots, n+1\}$ presque sûrement. Posons $U = Z - 1$: alors $P^*([U \in \{0, \dots, n\}]) = 1$.

- X admet une espérance corrigée par h pour P^* : en effet $pS_X^* \leq S_X$ par (ii), donc $0 \leq h(S_X^*) \leq \frac{g(S_X)}{g(p)}$, qui est intégrable.
- L'hypothèse de récurrence (pour P^* et h) donne $E_h^*(X + U) \leq E_h^*(X) + E_h^*(U)$, où E_h^* désigne l'espérance corrigée par h pour P^* ; les existences viennent de 12 car U est bornée.
- D'après 11.c) avec $r = 1$ et $s = 1$ (résultat valable pour toute probabilité) : $E_h^*(X + Z) = E_h^*(X + U) + 1$ et $E_h^*(Z) = E_h^*(U) + 1$.

Donc $E_h^*(X + Z) \leq E_h^*(X) + E_h^*(Z)$, c'est-à-dire :

$$\int_0^{+\infty} h(S_{X+Z}^*(x)) dx \leq \int_0^{+\infty} h(S_X^*(x)) dx + \int_0^{+\infty} h(S_Z^*(x)) dx.$$

- d) En multipliant par $g(p) > 0$, on obtient $\int g(pS_{X+Z}^*) - \int g(pS_X^*) - \int g(pS_Z^*) \leq 0$. On intègre l'inégalité de b)(iii) sur $]0, +\infty[$; toutes les intégrales convergent, en particulier $E_g(Z)$ et $E_g(X + Z)$ par 12. On obtient :

$$E_g(X + Z) \leq E_g(X) + E_g(Z).$$

Si $p = 0$, alors $Z = 0$ presque sûrement et le résultat découle de a). La propriété est donc vraie au rang $n + 1$ (pour toute probabilité, toute distorsion et toute X). Par récurrence, l'inégalité (2) est vraie pour toute variable U à valeurs presque sûrement dans $\{0, 1, \dots, n\}$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

14. Le cas général.

- a) $0 \leq Y_n \leq Y \leq B$ presque sûrement, donc $E_g(Y_n)$ et $E_g(X + Y_n)$ existent par 12. De plus, $U = nY_n = \lfloor nY \rfloor$ est presque sûrement à valeurs dans $\{0, \dots, \lfloor nB \rfloor\}$, et $E_g(nX) = nE_g(X)$ existe (11.c)). D'après 13 appliqué à nX et U :

$$E_g(nX + U) \leq E_g(nX) + E_g(U) = nE_g(X) + nE_g(Y_n),$$

où l'on a utilisé 11.c) pour $E_g(U) = E_g(nY_n) = nE_g(Y_n)$. Toujours par 11.c) (avec $r = \frac{1}{n}$), $E_g(X + Y_n) = \frac{1}{n}E_g(nX + U)$.

$$\boxed{E_g(X + Y_n) \leq E_g(X) + E_g(Y_n).}$$

- b) $\lfloor nY \rfloor \leq nY$, donc $Y_n \leq Y$ et, pour $x > 0$, $[Y_n > x] \subset [Y > x]$. Ainsi $S_{Y_n} \leq S_Y$, et par croissance de g :

$$\boxed{E_g(Y_n) \leq E_g(Y).}$$

- c) Le changement de variable $u = x - \frac{1}{n}$ (affine, de classe $\mathcal{C}^1$, bijectif) donne l'égalité. Comme $\lfloor nY \rfloor > nY - 1$, on a $Y < Y_n + \frac{1}{n}$. Donc $[X + Y > u + \frac{1}{n}] \subset [X + Y_n > u]$, d'où $S_{X+Y}(u + \frac{1}{n}) \leq S_{X+Y_n}(u)$, et par croissance de g :

$$\boxed{\int_{1/n}^{+\infty} g(S_{X+Y}(x)) dx = \int_0^{+\infty} g\left(S_{X+Y}\left(u + \frac{1}{n}\right)\right) du \leq E_g(X + Y_n).}$$

- d) $E_g(X + Y)$ existe (12). Comme $g \circ S_{X+Y} \leq 1$, on obtient avec a), b) et c) :

$$E_g(X + Y) \leq \frac{1}{n} + \int_{1/n}^{+\infty} g(S_{X+Y}) \leq \frac{1}{n} + E_g(X) + E_g(Y_n) \leq \frac{1}{n} + E_g(X) + E_g(Y).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$:

$$\boxed{E_g(X + Y) \leq E_g(X) + E_g(Y).}$$