

Mathématiques II

HEC Paris – ESCP Europe

Mathématiques approfondies

Mercredi 6 mai 2015 – de 8 h à 12 h

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programme de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

Problème – Espérances corrigées	2
<i>Thèmes abordés : variables à densité ; probabilités discrètes ; intégrales généralisées ; fonctions d'une variable ; Python</i>	<i>2</i>

Problème – Espérances corrigées

Dans tout le problème, on note $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A})$ qui est, sauf mention contraire, muni de la probabilité P . On note S_X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S_X(x) = P([X > x]).$$

Dans le cadre de l'évaluation des risques encourus par des établissements financiers, il est nécessaire de retrancher à la valeur moyenne attendue des investissements (espérance mathématique « pure ») un terme correctif d'autant plus important que le risque est plus grand. L'objet du problème est de déterminer, grâce à une « fonction de distorsion », une « espérance corrigée » qui prend en compte cette notion de risque et qui possède les propriétés requises pour une évaluation cohérente de risques financiers, en particulier une propriété de sous-additivité nécessaire pour valoriser équitablement les avantages éventuels de la diversification.

Partie I. Probabilité de dépassement et espérance

1. On suppose uniquement dans cette question que X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$.

(a) Vérifier l'égalité

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} S_X(x) dx.$$

(b) Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction de répartition F de X et interpréter $\mathbb{E}(X)$ en terme d'aire grâce à la formule précédente.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$h(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)}.$$

(a) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(x) dx$.

(b) Déterminer deux réels c et d vérifiant, pour tout réel $x \geq 0$, la relation

$$h(x) = \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x+2}.$$

En déduire une primitive de h sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Montrer que la fonction f_0 définie par

$$f_0 : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{(x+1)(x+2) \ln 2} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est une densité de probabilité.

3. On suppose dans cette question que X admet pour densité la fonction f_0 définie à la question 2.c).

(a) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

(b) Pour tout x réel, calculer $S_X(x)$ et en trouver un équivalent lorsque x tend vers $+\infty$.

(c) Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} S_X(x) dx$.

4. (a) Justifier la monotonie de la fonction S_X et trouver la limite de $S_X(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

(b) Montrer que la fonction S_X est continue à droite. À quelle condition est-elle continue en 0 ?

5. Dans cette question, on suppose que X admet une densité f nulle sur $] -\infty, 0]$, continue sur $]0, +\infty[$, mais non nécessairement en 0.

(a) Montrer que la fonction S_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

(b) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 xf(x) dx$.

(c) Établir, pour tout réel $A \geq 0$, l'égalité

$$\int_0^A S_X(x) dx = AS_X(A) + \int_0^A xf(x) dx.$$

(d) En déduire que, si l'intégrale $\int_0^{+\infty} S_X(x) dx$ est convergente, alors X admet une espérance.

(e) Montrer que, si X admet une espérance, alors, pour tout réel $A \geq 0$,

$$\int_A^{+\infty} xf(x) dx \geq AS_X(A).$$

(f) Déduire des résultats précédents que X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} S_X(x) dx$ est convergente et que, dans ce cas,

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} S_X(x) dx. \quad (1)$$

6. Dans cette question, on suppose que X est discrète et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(a) Établir, pour tout entier naturel n , l'égalité

$$\sum_{k=0}^n S_X(k) = (n+1)P([X \geq n+1]) + \sum_{k=0}^n kP([X = k]).$$

(b) En déduire que, si la série de terme général $S_X(n)$ est convergente, alors X admet une espérance.

(c) Montrer que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $S_X(n)$ est convergente et que, dans ce cas,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_X(n).$$

(d) On suppose que X admet une espérance.

(i) Exprimer, pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^N S_X(x) dx$ à l'aide d'une somme partielle de la série de terme général $S_X(n)$.

(ii) En déduire que $\mathbb{E}(X) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A S_X(x) dx$.

Ainsi, la relation (1) reste applicable dans le cas des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$; on admet qu'elle reste applicable à toute variable aléatoire pour laquelle l'intégrale $\int_0^{+\infty} S_X(x) dx$ est convergente.

Partie II. Fonctions de distorsion et espérances corrigées : un exemple

On appelle *fonction de distorsion* toute fonction g définie, continue et croissante sur l'intervalle $[0, 1]$ qui vérifie les trois propriétés supplémentaires suivantes : $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ et g est concave sur $]0, 1[$.

Pour toute fonction de distorsion g , on dit que X admet une *espérance corrigée par g* si la fonction composée $g \circ S_X$ admet une intégrale convergente sur $[0, +\infty[$. Cette intégrale, notée $E_g(X)$, est appelée espérance de X corrigée par g . Ainsi,

$$E_g(X) = \int_0^{+\infty} g(S_X(x)) dx.$$

7. *Exemple.* Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, dont la dérivée, notée φ , est telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}.$$

- (a) Justifier que Φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$. On note Ψ la bijection réciproque de Φ .

Soit $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ et w_α la fonction définie sur $[0, 1]$ telle que

$$w_\alpha(x) = \begin{cases} \Phi(\Psi(x) - \Psi(\alpha)) & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

- (b) Montrer que la fonction w_α est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$.

- (c) On note w'_α la dérivée de w_α . Établir, pour tout $x \in]0, 1[$, la relation

$$w'_\alpha(x) = \exp\left(\Psi(\alpha)\Psi(x) - \frac{(\Psi(\alpha))^2}{2}\right).$$

- (d) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction w_α au point d'abscisse α .

- (e) Vérifier que w_α est une fonction de distorsion.

8. On considère à nouveau la fonction de distorsion w_α définie dans la question 7. Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi normale d'écart-type égal à 1, dont l'espérance est notée μ , et soit X une variable aléatoire qui suit la même loi que $\exp(Y)$.

- (a) Justifier l'existence de l'espérance de X et la calculer.

- (b) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, on a

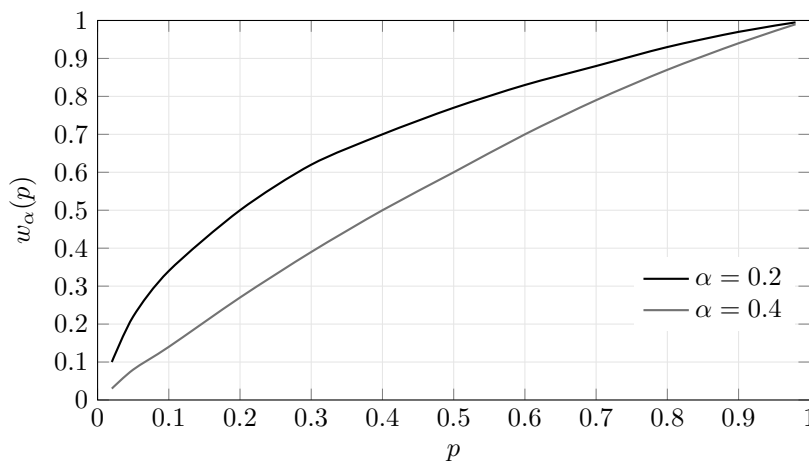
$$w_\alpha(S_X(x)) = P([Xe^{-\Psi(\alpha)} > x]).$$

- (c) En déduire l'existence et la valeur de $E_{w_\alpha}(X)$.

9. Pour tracer en Python la courbe représentative de w_α , on utilisera les fonctions `norm.cdf` et `norm.ppf` du module `scipy.stats`, qui calculent respectivement la fonction de répartition et la fonction quantile de la loi normale centrée réduite. On suppose que `norm` et `plt` ont été importés au préalable.

Le graphique ci-dessous a été obtenu en affectant successivement à la variable `alpha` les valeurs 0.2 et 0.4, et en exécutant les cinq instructions suivantes, la quatrième étant incomplète.

```
qa = norm.ppf(alpha)
p = [0.02 + 0.01*k for k in range(97)]
q = [norm.ppf(x) - qa for x in p]
wa = ...
plt.plot(p, wa)
```



- (a) Quelles sont les valeurs affectées aux variables $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ par les instructions 2 et 3 (on en précisera le format) ?
- (b) Compléter la quatrième ligne de code.
- (c) À laquelle des deux courbes correspond la valeur $\alpha = 0.2$ (on justifiera mathématiquement la réponse) ?
- (d) Comment trouver les tangentes aux deux courbes en $(0, 0)$ et $(1, 1)$?
- (e) Que deviendrait la courbe représentative de w_α si l'on faisait tendre α vers 0 ?

Partie III. Sous-additivité des espérances corrigées

Les notations et le contexte de cette partie sont identiques à ceux des parties I et II.

Dans cette partie, on note g une fonction de distorsion arbitraire et on suppose l'existence de $E_g(X)$. Soit B un réel positif et soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que $P([Y \in [0, B]]) = 1$. L'objectif de cette partie consiste à établir l'inégalité

$$E_g(X + Y) \leq E_g(X) + E_g(Y). \quad (2)$$

10. (a) Soit x un réel fixé de $[0, 1]$. Justifier, pour tout entier $n \geq 1$, l'inégalité

$$g\left(x\left(1 - \frac{1}{n}\right) + (1-x)\frac{1}{n}\right) \geq xg\left(1 - \frac{1}{n}\right) + (1-x)g\left(\frac{1}{n}\right).$$

- (b) En déduire que $g(x) \geq x$.
- (c) Soit a, b et ε trois réels tels que $0 < a < b < b + \varepsilon < 1$. Justifier l'existence d'un réel $\lambda \in [0, 1]$ vérifiant les deux égalités

$$\begin{cases} \lambda a + (1 - \lambda)(b + \varepsilon) = b, \\ (1 - \lambda)a + \lambda(b + \varepsilon) = a + \varepsilon. \end{cases}$$

En déduire l'inégalité $g(b + \varepsilon) - g(a + \varepsilon) \leq g(b) - g(a)$.

- 11. (a) Montrer que $\mathbb{E}(X)$ existe et que $\mathbb{E}(X) \leq E_g(X)$.
- (b) Montrer que si X est une variable aléatoire certaine, on a $E_g(X) = \mathbb{E}(X)$.
- (c) Soit $r > 0$ et $s \geq 0$. Montrer que $E_g(rX + s)$ existe et que $E_g(rX + s) = rE_g(X) + s$.
- (d) Soit T et W deux variables aléatoires telles que $P([0 \leq T \leq W]) = 1$. Sous réserve d'existence, comparer $E_g(T)$ et $E_g(W)$.
- 12. Justifier l'existence de $E_g(Y)$ et de $E_g(X + Y)$; établir les inégalités $E_g(Y) \leq B$ et $E_g(X + Y) \leq E_g(X) + B$.
- 13. On se propose de montrer par récurrence sur l'entier n que l'inégalité (2) est vraie pour toute variable aléatoire U telle que $P([U \in [0, n]]) = 1$.

Soit n un entier naturel donné. On suppose que, quelle que soit la probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$, l'inégalité (2) est vraie pour toute fonction de distorsion g , pour toute variable aléatoire X possédant une espérance corrigée par g et pour toute variable aléatoire U telle que $P([U \in [0, n]]) = 1$.

- (a) Dédurre de la question 12 que la propriété ci-dessus est vérifiée pour $n = 0$.
- (b) On suppose la propriété ci-dessus vérifiée pour un entier naturel n donné. Soit Z une variable aléatoire telle que $P([Z \in [0, n + 1]]) = 1$ et $p = P([Z > 0]) > 0$.
On pose $P^* = P_{[Z > 0]}$ (probabilité conditionnelle sachant $[Z > 0]$). Pour tout réel $x > 0$, on pose

$$S_X^*(x) = P^*([X > x]), \quad S_Z^*(x) = P^*([Z > x]), \quad S_{X+Z}^*(x) = P^*([X + Z > x]).$$

- (i) Établir l'égalité

$$S_{X+Z}(x) = (1 - p)P_{[Z=0]}([X > x]) + pS_{X+Z}^*(x).$$

- (ii) Exprimer $S_X(x)$ et $S_Z(x)$ en fonction de p , $P_{[Z=0]}([X > x])$, $S_X^*(x)$ et $S_Z^*(x)$.

(iii) En utilisant le résultat de la question 10.c), déduire des relations précédentes l'inégalité

$$g(S_{X+Z}(x)) - g(S_X(x)) - g(S_Z(x)) \leq g(pS_{X+Z}^*(x)) - g(pS_X^*(x)) - g(pS_Z^*(x)).$$

(c) Justifier que la fonction $h : x \mapsto \frac{g(px)}{g(p)}$ est une fonction de distorsion et établir l'inégalité

$$\int_0^{+\infty} h(S_{X+Z}^*(x)) \, dx \leq \int_0^{+\infty} h(S_X^*(x)) \, dx + \int_0^{+\infty} h(S_Z^*(x)) \, dx.$$

(d) En déduire l'inégalité $E_g(X + Z) \leq E_g(X) + E_g(Z)$. Conclure.

14. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$Y_n(\omega) = \frac{1}{n} [nY(\omega)],$$

où $[u]$ désigne la partie entière de u .

(a) Justifier l'existence de $E_g(Y_n)$ et de $E_g(X + Y_n)$; établir l'inégalité $E_g(X + Y_n) \leq E_g(X) + E_g(Y_n)$.

(b) Pour $x > 0$, comparer les événements $[Y_n > x]$ et $[Y > x]$, et montrer que $E_g(Y_n) \leq E_g(Y)$.

(c) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\int_{1/n}^{+\infty} g(S_{X+Y}(x)) \, dx = \int_0^{+\infty} g\left(S_{X+Y}\left(x + \frac{1}{n}\right)\right) \, dx \leq E_g(X + Y_n).$$

(d) En déduire l'inégalité (2).