

ECRICOME

Mathématiques approfondies

Corrigé du sujet adapté – 2016

Les questions et sous-questions conservent la numérotation de l'énoncé adapté.

Exercice 1

Exercice 1 – La série $\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}.$$

Corrigé – Exercice 1.

1. La constante d'Euler.

a)

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 + o(x^2).$$

b) $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+1/n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Avec a) et $x = \frac{1}{n} \rightarrow 0$:

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$w_{n+1} - w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

c) $w_n - w_{n+1} \sim \frac{1}{2n^2} > 0$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann) : par comparaison de séries à termes positifs, $\sum (w_{n+1} - w_n)$ converge. Comme $w_n = w_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (w_{k+1} - w_k)$:

$$\sum (w_{n+1} - w_n) \text{ converge et } (w_n) \text{ converge vers un réel } \gamma.$$

2. Étude de φ .

φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\varphi'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2}$, positif sur $]0, e]$ et négatif sur $[e, +\infty[$.
 $\varphi(t) \rightarrow -\infty$ quand $t \rightarrow 0^+$ et $\varphi(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ (croissances comparées).

t	0	e	$+\infty$
$\varphi'(t)$		+	−
φ	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

3. Convergence de $\sum u_n$.

a) On a $u_n = (-1)^n \varphi(n)$ et φ est décroissante sur $[3, +\infty[\subset [e, +\infty[$. Pour $n \geq 2$:

$$S_{2n+2} - S_{2n} = \varphi(2n+2) - \varphi(2n+1) \leq 0,$$

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = \varphi(2n+2) - \varphi(2n+3) \geq 0,$$

$$\text{et } S_{2n+1} - S_{2n} = -\varphi(2n+1) \rightarrow 0.$$

$$(S_{2n})_{n \geq 2} \text{ et } (S_{2n+1})_{n \geq 2} \text{ sont adjacentes.}$$

b) Deux suites adjacentes convergent vers une même limite ℓ ; les sous-suites paire et impaire de (S_n) convergeant vers ℓ , (S_n) converge. En revanche $|u_n| = \frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$ pour $n \geq 3$, et $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

$$\sum u_n \text{ converge, mais pas absolument.}$$

4. La suite (v_n) .

a) Pour $n \geq 3$ et $t \in [n, n+1]$, $\varphi(t) \geq \varphi(n+1)$ (φ décroissante sur $[e, +\infty[$) ; par croissance de l'intégrale :

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt.$$

b) Une primitive de φ est $t \mapsto \frac{(\ln t)^2}{2}$, donc

$$v_{n+1} - v_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt \leq 0 \quad (n \geq 3).$$

De plus $v_n = \sum_{k=1}^n \varphi(k) - \int_1^n \varphi(t) dt = (\varphi(1) + \varphi(2) - \int_1^3 \varphi) + \sum_{k=3}^{n-1} (\varphi(k) - \int_k^{k+1} \varphi) + \varphi(n)$ pour $n \geq 4$. Chaque terme de la somme est positif (comme en a), et $\varphi(n) \geq 0$: (v_n) est minorée par $\varphi(2) - \int_1^3 \varphi$. Par le théorème de la limite monotone :

$$(v_n)_{n \geq 3} \text{ est décroissante et convergente.}$$

5. Expression de S_{2n} .

$$S_{2n} = \sum_{k \text{ pair} \leq 2n} \varphi(k) - \sum_{k \text{ impair} \leq 2n} \varphi(k) = 2 \sum_{k \text{ pair} \leq 2n} \varphi(k) - \sum_{k=1}^{2n} \varphi(k) :$$

$$S_{2n} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k}.$$

Ensuite $2 \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} = \ln 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} = \ln 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + v_n + \frac{(\ln n)^2}{2}$ et $\sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k} = v_{2n} + \frac{(\ln 2 + \ln n)^2}{2}$. En développant :

$$S_{2n} = \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{(\ln 2)^2}{2} - \ln(2) \ln(n).$$

6. Somme de la série.

$S_{2n} = \ln(2) w_n + v_n - v_{2n} - \frac{(\ln 2)^2}{2}$; $w_n \rightarrow \gamma$ et $v_n - v_{2n} \rightarrow 0$ ((v_n) converge). La série convergeant (3.b), sa somme est la limite de (S_{2n}) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}.$$

Exercice 2**Exercice 2 – Points critiques et polynômes propres**

u critique $\iff S'' - 4XS' + 4nS = 0$; unicité du point critique.

Corrigé – Exercice 2.**1. L'endomorphisme ϕ .**

- a) ϕ est linéaire (linéarité de la dérivation). Si $\deg P \leq n$, $\deg(4XP') \leq n$ et $\deg P'' \leq n$.

ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

- b) $\phi(X^k) = 4kX^k - k(k-1)X^{k-2}$ ($\phi(1) = 0$, $\phi(X) = 4X$) :

$$\text{Mat}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -6 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 8 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 4n \end{pmatrix}.$$

(coefficients diagonaux $4k$, coefficient $-k(k-1)$ en position $(k-2, k)$, autres nuls).

- c) Avec $P = 3X - 4X^3$: $P' = 3 - 12X^2$, $P'' = -24X$, $\phi(P) = 12X - 48X^3 + 24X = 12(3X - 4X^3)$.

$3X - 4X^3$ est vecteur propre de ϕ pour la valeur propre 12.

- d) La matrice est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $4k$, $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, deux à deux distincts : ϕ a $n+1$ valeurs propres distinctes en dimension $n+1$.

ϕ est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

2. Le cas $n = 2$.

- a) $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est polynomiale et $(x, y) \mapsto \ln(y-x)$ est la composée de $\ln$ (de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$) et d'une fonction polynomiale strictement positive sur $\mathcal{D}_2$: f est

de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_2$.

$$\begin{aligned} \partial_1 f &= 2x + \frac{1}{y-x}, & \partial_2 f &= 2y - \frac{1}{y-x}, \\ \partial_{1,1}^2 f &= \partial_{2,2}^2 f = 2 + \frac{1}{(y-x)^2}, & \partial_{1,2}^2 f &= \partial_{2,1}^2 f = -\frac{1}{(y-x)^2}. \end{aligned}$$

- b) En sommant, $\nabla f = 0$ impose $2(x+y) = 0$, soit $y = -x$ avec $x < 0$, puis $2x - \frac{1}{2x} = 0$, $x^2 = \frac{1}{4}$, $x = -\frac{1}{2}$. Réciproquement $\nabla f(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0$.

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ est l'unique point critique de } f.$$

- c) ${}^t(1, 1)$ et ${}^t(1, -1)$ sont vecteurs propres associés à 2 et 4. En ce point $y - x = 1$ et la hessienne est cette matrice, dont les valeurs propres sont strictement positives.

$$\text{Sp} = \{2, 4\} ; f \text{ admet un minimum local en } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

3. Caractérisation des points critiques.

- a) x_k intervient dans $\ln(x_j - x_k)$ pour $j > k$ (dérivée $\frac{-1}{x_j - x_k}$) et dans $\ln(x_k - x_i)$ pour $i < k$ (dérivée $\frac{1}{x_k - x_i}$) :

$$\partial_k f = 2x_k + \sum_{j>k} \frac{1}{x_j - x_k} - \sum_{i<k} \frac{1}{x_k - x_i},$$

$$\partial_k f(u) = 2x_k - \sum_{i \neq k} \frac{1}{x_k - x_i}.$$

- b) $\mathcal{D}_n$ est ouvert et f de classe $\mathcal{C}^1$: u est critique si et seulement si toutes les dérivées partielles s'annulent en u .

$$u \text{ critique} \iff \forall k, 2x_k - \sum_{i \neq k} \frac{1}{x_k - x_i} = 0.$$

- c) $S' = Q_k + (X - x_k)Q'_k$ et $S'' = 2Q'_k + (X - x_k)Q''_k$; en x_k :

$$S'(x_k) = Q_k(x_k), \quad S''(x_k) = 2Q'_k(x_k).$$

- d) Par la formule de dérivation d'un produit, $Q'_k = \sum_{i \neq k} \prod_{j \neq k, i} (X - x_j)$, et pour x distinct des x_i ($i \neq k$), $\prod_{j \neq k, i} (x - x_j) = \frac{Q_k(x)}{x - x_i}$.

$$Q'_k(x) = Q_k(x) \sum_{i \neq k} \frac{1}{x - x_i}.$$

- e) Les x_i étant distincts, on peut prendre $x = x_k$ dans d), et $Q_k(x_k) \neq 0$. Avec c) :

$$S''(x_k) - 4x_k S'(x_k) = -2Q_k(x_k) \left(2x_k - \sum_{i \neq k} \frac{1}{x_k - x_i} \right).$$

$$u \text{ critique} \iff \forall k, S''(x_k) - 4x_k S'(x_k) = 0.$$

- f) Si u est critique, $T = S'' - 4XS'$, de degré $\leq n$, s'annule aux n réels distincts x_k : il est divisible par S (unitaire de degré n), donc $T = \lambda S$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Réciproquement, si $T = \lambda S$, $T(x_k) = 0$ pour tout k . Le terme dominant de T est $-4nX^n$ et celui de S est X^n , donc $\lambda = -4n$.

$$u \text{ critique} \iff S'' - 4XS' + 4nS = 0.$$

4. Unicité et cas $n = 3$.

- a) $S'' - 4XS' + 4nS = 0$ signifie $\phi(S) = 4nS$: S est un vecteur propre de ϕ associé à $4n$. D'après 1.d), $E_{4n}(\phi)$ est une droite, et elle contient au plus un polynôme unitaire de degré n . Si u et u' sont critiques, leurs polynômes S sont égaux, donc leurs racines aussi, rangées dans l'ordre croissant : $u = u'$.

$$f \text{ admet au plus un point critique sur } \mathcal{D}_n.$$

- b) Pour $n = 3$, $E_{12}(\phi) = \text{Vect}(3X - 4X^3)$ et le polynôme unitaire correspondant est $S = X^3 - \frac{3}{4}X = X(X - \frac{\sqrt{3}}{2})(X + \frac{\sqrt{3}}{2})$, de racines réelles distinctes. Avec $u = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}) \in \mathcal{D}_3$, on a $S'' - 4XS' + 12S = 0$, donc u est critique.

$$\text{Unique point critique sur } \mathcal{D}_3 : \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Problème

Problème – Partie A – La loi Beta

$I_{a,b} = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}$, moments et fonction de répartition.

Corrigé – Problème.

1. Les intégrales $I_{a,b}$.

a)

$$I_{a,0} = \int_0^1 x^a dx = \frac{1}{a+1}.$$

b) On intègre par parties sur $[0, 1]$ avec $p(x) = (1-x)^b$ et $q(x) = \frac{x^{a+1}}{a+1}$, de classe $\mathcal{C}^1$, $p'(x) = -b(1-x)^{b-1}$, $q'(x) = x^a$; le crochet est nul ($b \geq 1$) :

$$I_{a,b} = \frac{b}{a+1} I_{a+1,b-1}.$$

c) Par récurrence sur b (pour tout a) : vrai pour $b = 0$ par a). Si c'est vrai au rang $b-1$, $I_{a,b} = \frac{b}{a+1} \cdot \frac{(a+1)!(b-1)!}{(a+b+1)!}$.

$$I_{a,b} = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}.$$

d) $f_{a,b}$ est positive, continue sauf éventuellement en 0 et 1, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b} = \frac{(a+b+1)!}{a!b!} I_{a,b} = 1$.

$f_{a,b}$ est une densité de probabilité.

2. La loi Beta.

a) $f_{a,b}$ est nulle hors de $[0, 1]$, donc les moments existent, et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{(a+b+1)!}{a!b!} I_{a+1,b} = \frac{(a+b+1)!}{a!b!} \cdot \frac{(a+1)!b!}{(a+b+2)!},$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+1}{a+b+2}.$$

b) De même $\mathbb{E}(X^2) = \frac{(a+b+1)!}{a!b!} I_{a+2,b} = \frac{(a+1)(a+2)}{(a+b+2)(a+b+3)}$. Par la formule de König-Huygens, et comme $(a+2)(a+b+2) - (a+1)(a+b+3) = b+1$:

$$\mathbb{V}(X) = \frac{a+1}{a+b+2} \cdot \frac{(a+2)(a+b+2) - (a+1)(a+b+3)}{(a+b+2)(a+b+3)},$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{(a+1)(b+1)}{(a+b+3)(a+b+2)^2}.$$

- c) Notons $N = a + b + 1$; sur $[0, 1]$, $F(x) = \sum_{k=a+1}^N \binom{N}{k} x^k (1-x)^{N-k}$. F est continue sur $\mathbb{R}$: $F(0) = 0$ (car $k \geq 1$) et $F(1) = \binom{N}{N} = 1$. Sur $]0, 1[$, avec $k \binom{N}{k} = N \binom{N-1}{k-1}$ et $(N-k) \binom{N}{k} = N \binom{N-1}{k}$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= N \sum_{k=a+1}^N \left(\binom{N-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{N-k} - \binom{N-1}{k} x^k (1-x)^{N-k-1} \right) \\ &= N \binom{N-1}{a} x^a (1-x)^{N-1-a} \end{aligned}$$

(somme télescopique, le dernier terme étant nul pour $k = N$), c'est-à-dire $F' = f_{a,b}$. Ainsi F et $x \mapsto \int_{-\infty}^x f_{a,b}$ sont continues, ont même dérivée sur $]0, 1[$ et coïncident en 0 ; elles sont égales sur $[0, 1]$, et aussi hors de $[0, 1]$.

F est la fonction de répartition de X .

Problème – Partie B – L'urne de Pólya

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{a+k-1}{a-1} \binom{b+n-k-1}{b-1} / \binom{a+b+n-1}{a+b-1} ; \mathbb{E}(X_n) = \frac{na}{a+b}.$$

Corrigé – Problème.

3. Valeurs de X_n .

$$X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket.$$

4. Simulation.

- a) La boule est rouge avec probabilité $\frac{x}{x+y}$:

if $r < x / (x + y)$:

- b) On ajoute une boule de la couleur tirée ; X_n est le nombre de rouges ajoutées :

$x = x + 1$

else :

$y = y + 1$

$X_n = x - a$

- c) On compte les fréquences d'apparition de chaque valeur $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

```
def simulation(a, b, n, m):
    loi = np.zeros(n + 1)
    for i in range(m):
        k = experience(a, b, n)
        loi[k] = loi[k] + 1
    return loi / m
```

5. Le cas $a = b = 1$.

- a) Les diagrammes ont des bâtons de même hauteur $\frac{1}{n+1}$:

Conjecture : $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$.

- b) Au premier tirage, l'urne contient une boule rouge et une blanche :

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

- c) Sachant $[X_n = k]$, l'urne contient $1 + k$ boules rouges et $1 + n - k$ blanches, soit $n + 2$ boules :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k+1) &= \frac{k+1}{n+2}, & \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k) &= \frac{n+1-k}{n+2}, \\ \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = \ell) &= 0 \quad (\ell \notin \{k, k+1\}). \end{aligned}$$

- d) C'est vrai pour $n = 1$. Si $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$, la formule des probabilités totales avec le système complet $([X_n = j])_{0 \leq j \leq n}$ donne, pour $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$ (en convenant que $\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = n+1) = 0$) :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n+1-k}{n+2} + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{k}{n+2} = \frac{1}{n+2}$$

(pour $k = 0$ et $k = n+1$, un seul terme est présent, et il vaut aussi $\frac{1}{n+2}$).

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket).$$

6. Le cas général.

- a) Par la formule des probabilités composées, avant le j -ième tirage l'urne contient $a + b + j - 1$ boules :

$$\mathbb{P} = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a+1}{a+b+1} \cdots \frac{a+k-1}{a+b+k-1} \cdot \frac{b}{a+b+k} \cdots \frac{b+n-k-1}{a+b+n-1},$$

$$\mathbb{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}} \cap \cdots \cap \overline{R_n}) = \frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!}.$$

- b) Toute suite de n tirages comportant k rouges a la même probabilité : les dénominateurs sont toujours $a + b, \dots, a + b + n - 1$ et les numérateurs sont, dans un autre ordre, $a, \dots, a + k - 1$ et $b, \dots, b + n - k - 1$. $[X_n = k]$ est la réunion disjointe de ces $\binom{n}{k}$ événements (aussi pour $k = 0$) :

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} \frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!}.$$

- c) On écrit $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ et l'on regroupe : $\frac{(a+k-1)!}{(a-1)!k!} = \binom{a+k-1}{a-1}$, $\frac{(b+n-k-1)!}{(b-1)!(n-k)!} = \binom{b+n-k-1}{b-1}$, $\frac{n!(a+b-1)!}{(a+b+n-1)!} = \binom{a+b+n-1}{a+b-1}^{-1}$:

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\binom{a+k-1}{a-1} \binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}.$$

- d) $(a+k)\binom{a+k-1}{a-1} = a\binom{a+k}{a}$. Par ailleurs, c) appliquée à l'urne de composition $(a+1, b)$ (somme des probabilités égale à 1) donne $\sum_{k=0}^n \binom{a+k}{a} \binom{b+n-k-1}{b-1} = \binom{a+b+n}{a+b}$. Donc

$$\mathbb{E}(a + X_n) = \frac{a\binom{a+b+n}{a+b}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} = \frac{a(a+b+n)}{a+b},$$

$$\mathbb{E}(a + X_n) = \frac{a(a+b+n)}{a+b}, \quad \mathbb{E}(X_n) = \frac{na}{a+b}.$$

Problème – Partie C – Convergence en loi de $\frac{X_n}{n}$

$Y_n = \frac{X_n}{n}$ converge en loi vers la loi Beta de paramètres $a - 1$ et $b - 1$.

Corrigé – Problème.

Notons $D_n = \binom{a+b+n-1}{a+b-1}$.

7. Valeurs extrêmes.

Y_n est à valeurs dans $[0, 1]$:

$$F_n(x) = 0 \text{ si } x < 0, \quad F_n(x) = 1 \text{ si } x \geq 1.$$

8. Le cas $x \in]0, 1[$.

a) $Y_n \leq x \iff X_n \leq nx \iff X_n \leq \lfloor nx \rfloor$ (X_n entière).

$$F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \leq \lfloor nx \rfloor).$$

b) $F_n(x) = \frac{1}{D_n} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{a+k-1}{a-1} \binom{b+n-k-1}{b-1}$. On applique la formule admise avec $p = \lfloor nx \rfloor + a \in \llbracket a, a+b+n-1 \rrbracket$ (car $\lfloor nx \rfloor \leq n-1$), et $a+b+n-1-p = b+n-1-\lfloor nx \rfloor$:

$$F_n(x) = \frac{1}{D_n} \sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{\lfloor nx \rfloor + a}{i} \binom{b+n-1-\lfloor nx \rfloor}{a+b-1-i}.$$

c) $\binom{m}{j} = \frac{m(m-1)\cdots(m-j+1)}{j!}$, produit de j facteurs équivalents à m :

$$\binom{m}{j} \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{m^j}{j!}.$$

d) $\lfloor nx \rfloor + a \sim nx$, $b+n-1-\lfloor nx \rfloor \sim n(1-x)$ et $D_n \sim \frac{n^{a+b-1}}{(a+b-1)!}$. Le terme d'indice i est donc équivalent à

$$\frac{(nx)^i}{i!} \cdot \frac{(n(1-x))^{a+b-1-i}}{(a+b-1-i)!} \cdot \frac{(a+b-1)!}{n^{a+b-1}} = \binom{a+b-1}{i} x^i (1-x)^{a+b-1-i}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{a+b-1}{i} x^i (1-x)^{a+b-1-i}.$$

9. Le cas $x = 0$.

$$F_n(0) = \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{\binom{b+n-1}{b-1}}{D_n} \sim \frac{n^{b-1}}{(b-1)!} \cdot \frac{(a+b-1)!}{n^{a+b-1}} \rightarrow 0 \text{ car } a \geq 1.$$

$$F_n(0) = \frac{\binom{b+n-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

10. Convergence en loi.

La fonction de répartition de la loi Beta de paramètres $a' = a - 1$ et $b' = b - 1$ (entiers naturels) est, d'après 2.c), $F(x) = \sum_{k=a}^{a+b-1} \binom{a+b-1}{k} x^k (1-x)^{a+b-1-k}$ sur $[0, 1]$, 0 avant,

1 après. D'après 7, 8.d) et 9, $F_n(x) \rightarrow F(x)$ pour tout réel x (y compris $x = 0$ où $F(0) = 0$). Par définition de la convergence en loi :

$$Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} Y, \quad Y \text{ de loi Beta de paramètres } a-1 \text{ et } b-1.$$

11. Espérance.

D'après 6.d), $\mathbb{E}(Y_n) = \frac{a}{a+b}$ pour tout n , et d'après 2.a), $\mathbb{E}(Y) = \frac{(a-1)+1}{(a-1)+(b-1)+2} = \frac{a}{a+b}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Y_n) = \frac{a}{a+b} = \mathbb{E}(Y).$$

L'espérance de la loi limite est la limite des espérances, ce qui est cohérent avec la convergence en loi obtenue ; la proportion de boules rouges ajoutées se stabilise en moyenne autour de la proportion initiale $\frac{a}{a+b}$.