

Ecricome

Mathématiques

Mathématiques approfondies

Sujet adapté – 2016

Les parties du sujet contenant des éléments n'étant plus au programme depuis 2022 ont été adaptées pour convenir aux nouveaux programmes de la filière Mathématiques approfondies en vigueur depuis 2023.

Table des matières

1 Exercice 1	2
<i>Thèmes abordés : séries ; fonctions d'une variable ; intégrales.</i>	2
2 Exercice 2	3
<i>Thèmes abordés : fonctions de plusieurs variables ; applications linéaires ; réduction. .</i>	3
3 Problème	4
<i>Thèmes abordés : intégrales ; variables à densité ; probabilités discrètes ; convergences de variables ; Python.</i>	4

1 Exercice 1

Thèmes abordés : séries ; fonctions d'une variable ; intégrales.

On pourra utiliser sans justification que $2 < e < 3$. On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général

$$u_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}, \quad n \geq 1.$$

1. Pour tout entier $n \geq 1$, on note

$$w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n).$$

- Rappeler les développements limités à l'ordre 2, lorsque x tend vers 0, de $\ln(1+x)$ et de $\frac{1}{1+x}$.
 - Montrer que $w_{n+1} - w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.
 - Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge, puis que la suite (w_n) converge vers un réel γ , appelé constante d'Euler.
2. Étudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ sur $]0, +\infty[$. Dresser son tableau de variations en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.
- Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \geq 2}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 2}$ sont adjacentes.
 - Montrer que la série de terme général u_n converge. Est-elle absolument convergente ?
4. Pour tout entier $n \geq 1$, on note

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}.$$

- Justifier que, pour tout entier $n \geq 3$, on a
- $$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt.$$
- En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 3}$ est décroissante et convergente.
5. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$S_{2n} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k},$$

puis que

$$S_{2n} = \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2) \ln(n).$$

6. Démontrer alors que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}.$$

2 Exercice 2

Thèmes abordés : fonctions de plusieurs variables ; applications linéaires ; réduction.

Le but de cet exercice est d'étudier, pour un entier $n \geq 2$, les points critiques de la fonction f définie sur

$$\mathcal{D}_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$$

par

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln(x_j - x_i).$$

On admettra que $\mathcal{D}_n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

- Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on note $\phi(P) = 4XP'(X) - P''(X)$.
 - Montrer que l'application $\phi : P \mapsto \phi(P)$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
 - Écrire la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
 - Vérifier que le polynôme $3X - 4X^3$ est un vecteur propre de ϕ pour une valeur propre à préciser.
 - Montrer que ϕ est diagonalisable et préciser la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.
- Dans cette question, et uniquement dans cette question, on considère le cas $n = 2$. Ainsi,

$$\mathcal{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2 - \ln(y - x).$$

- Justifier que f admet des dérivées partielles premières et secondes sur $\mathcal{D}_2$, et les calculer.
- Montrer que f admet un unique point critique, de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
- Déterminer les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. La fonction f admet-elle un extremum local en $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$?

On revient au cas général, avec $n \geq 2$. On note $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D}_n$, et S le polynôme réel défini par

$$S(X) = \prod_{k=1}^n (X - x_k).$$

Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on note $Q_k(X) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} (X - x_i)$; ainsi, $S(X) = (X - x_k)Q_k(X)$.

- Calculer $\partial_k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.
 - En déduire que

$$u \text{ est un point critique de } f \iff \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad 2x_k - \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} \frac{1}{x_k - x_i} = 0.$$

- Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $S'(x_k) = Q_k(x_k)$ et $S''(x_k) = 2Q'_k(x_k)$.
- Justifier que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_i \mid 1 \leq i \leq n, i \neq k\}$,

$$Q'_k(x) = Q_k(x) \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} \frac{1}{x - x_i}.$$

e) En déduire que

$$u \text{ est un point critique de } f \iff \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad S''(x_k) - 4x_k S'(x_k) = 0.$$

f) Montrer que u est un point critique de f si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$S''(X) - 4XS'(X) = \lambda S(X).$$

En observant le terme dominant de S , montrer plus précisément que

$$u \text{ est un point critique de } f \iff S''(X) - 4XS'(X) + 4nS(X) = 0.$$

4. a) À l'aide des résultats des questions 1.d et 3.f, montrer que f admet au plus un seul point critique sur $\mathcal{D}_n$.
- b) Dans le cas spécifique où $n = 3$, montrer, en utilisant le résultat de la question 1.c, que f admet un unique point critique sur $\mathcal{D}_3$, que l'on déterminera.

3 Problème

Thèmes abordés : intégrales ; variables à densité ; probabilités discrètes ; convergences de variables ; Python.

Partie A

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, on note

$$I_{a,b} = \int_0^1 x^a (1-x)^b dx$$

et $f_{a,b}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{(a+b+1)!}{a!b!} x^a (1-x)^b, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

1. a) Calculer $I_{a,0}$ pour tout $a \in \mathbb{N}$.
- b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \quad I_{a,b} = \frac{b}{a+1} I_{a+1,b-1}.$$

- c) En déduire que $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, \quad I_{a,b} = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}$.
- d) Justifier que, pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.
2. Dans toute la suite de cette partie, on fixe $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et on considère une variable aléatoire réelle X admettant $f_{a,b}$ pour densité. On dit que X suit la loi Beta de paramètres a et b .

- a) Montrer que X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \frac{a+1}{a+b+2}$.
- b) Montrer que X admet une variance et que $\mathbb{V}(X) = \frac{(a+1)(b+1)}{(a+b+3)(a+b+2)^2}$.

c) Soit F la fonction définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ (a+b+1)! \sum_{k=a+1}^{a+b+1} \frac{x^k (1-x)^{a+b+1-k}}{k!(a+b+1-k)!}, & x \in [0, 1], \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Montrer que F est la fonction de répartition de X .

Partie B

Soient a, b deux entiers strictement positifs. Une urne contient initialement a boules rouges et b boules blanches. On effectue une succession d'épreuves, chacune constituée des trois étapes suivantes :

- on pioche une boule au hasard dans l'urne ;
- on replace la boule tirée dans l'urne ;
- on rajoute dans l'urne une boule de la même couleur que celle qui vient d'être piochée.

Après n épreuves, l'urne contient donc $a+b+n$ boules. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de boules rouges ajoutées dans l'urne, par rapport à la composition initiale, à l'issue des n premières épreuves. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n l'événement « on pioche une boule rouge au n -ième tirage ».

3. Donner l'ensemble $X_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire X_n , en fonction de n .
4. On souhaite simuler l'expérience grâce à Python.

- a) Compléter la fonction suivante, qui simule le tirage d'une boule dans une urne contenant x boules rouges et y boules blanches, et qui retourne 0 si la boule est rouge et 1 si elle est blanche.

```
import random

def tirage(x, y):
    r = random.random()
    if ...:
        return 0
    else:
        return 1
```

- b) Compléter la fonction suivante, qui simule n tirages successifs dans une urne contenant initialement a boules rouges et b boules blanches, selon le protocole décrit ci-dessus, et qui retourne la valeur de X_n .

```
def experience(a, b, n):
    x = a
    y = b
    for k in range(n):
        r = tirage(x, y)
        if r == 0:
            x = ...
        else:
            ...
    return ...
```

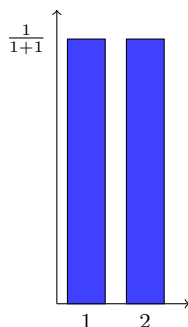
c) Écrire une fonction Python d'en-tête

```
def simulation(a, b, n, m):
```

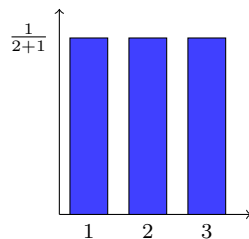
qui fait appel m fois à la fonction précédente pour estimer la loi de X_n . Le paramètre de sortie sera une liste contenant les approximations de $\mathbb{P}(X_n = 0), \mathbb{P}(X_n = 1), \dots, \mathbb{P}(X_n = n)$.

5. On considère le cas où $a = b = 1$. On utilise la fonction `simulation` avec des valeurs de n entre 1 et 5 et on affiche à chaque fois l'estimation de la loi de X_n sous la forme d'un diagramme en bâtons. Les résultats obtenus sont les suivants.

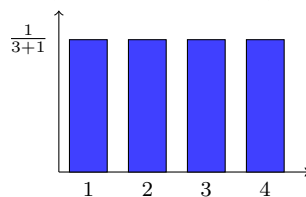
```
plt.bar(range(2), simulation(1, 1, 1, 100000))
```



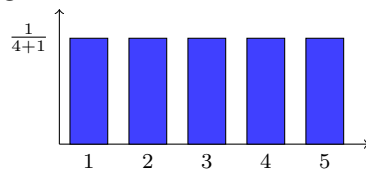
```
plt.bar(range(3), simulation(1, 1, 2, 100000))
```



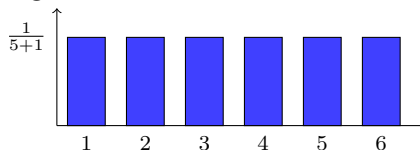
```
plt.bar(range(4), simulation(1, 1, 3, 100000))
```



```
plt.bar(range(5), simulation(1, 1, 4, 100000))
```



```
plt.bar(range(6), simulation(1, 1, 5, 100000))
```



- a) À l'aide de ces résultats, conjecturer la loi de X_n .
 b) Déterminer la loi de X_1 .

- c) Soient k et n deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$. Déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$\mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k), \quad \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k+1), \quad \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = \ell), \quad \ell \notin \{k, k+1\}.$$

- d) En raisonnant par récurrence sur n , prouver la conjecture émise à la question 5.a.

6. On revient au cas général où a et b sont deux entiers strictement positifs.

- a) Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Calculer la probabilité

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_k \cap \bar{R}_{k+1} \cap \bar{R}_{k+2} \cap \dots \cap \bar{R}_n).$$

- b) Justifier alors que

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad \mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} \frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!}.$$

- c) En déduire que

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\binom{a+k-1}{a-1} \binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}.$$

- d) Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{a+X_n}{n}\right)$, puis en déduire que $\mathbb{E}(X_n) = \frac{na}{a+b}$.

Partie C

On admet dans cette partie que si a , b et n sont trois entiers strictement positifs, alors, pour tout entier $p \in \{a, \dots, a+b+n-1\}$, on a

$$\sum_{k=0}^{p-a} \binom{a+k-1}{a-1} \binom{b+n-k-1}{b-1} = \sum_{i=a}^p \binom{i}{a-1} \binom{a+b+n-1-i}{a+b-1-i}.$$

On reprend, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n étudiée dans la partie précédente, et on note $Y_n = \frac{X_n}{n}$. On note F_n la fonction de répartition de Y_n .

7. a) Soit $x < 0$. Que vaut $F_n(x)$?
 b) Soit $x \geq 1$. Que vaut $F_n(x)$?
8. On fixe $x \in]0, 1[$. Pour tout réel y , on note $\lfloor y \rfloor$ la partie entière de y , c'est-à-dire le plus grand entier m tel que $m \leq y$. On rappelle alors que $y-1 < \lfloor y \rfloor \leq y$.
- a) Justifier que $F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \leq \lfloor nx \rfloor)$.
- b) À l'aide de la formule sommatoire admise au début de la partie C, prouver que

$$F_n(x) = \frac{\sum_{i=a}^{a+b-1} \binom{\lfloor nx \rfloor + a}{i} \binom{b+n-1-\lfloor nx \rfloor}{a+b-1-i}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}.$$

- c) Pour $j \in \mathbb{N}$ fixé, déterminer un équivalent simple de $\binom{m}{j}$ lorsque m tend vers $+\infty$.

-
- d) Déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On obtiendra un résultat sous forme d'une somme qu'on ne tentera pas de calculer.
9. Déterminer $F_n(0)$ puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.
10. Dédire de ce qui précède que la suite (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi Beta, dont on explicitera les paramètres.
11. À l'aide du résultat de la question 6.d de la partie B, déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\mathbb{E}(Y_n)$ et commenter ce résultat à la lumière de la question précédente.